Пояснение А

Ковариантная производная вдоль базсиного вектора

Есть одна тонкость в понимании ковариантной производной $\nabla_\mu a \equiv \nabla_{\partial_\mu} a$ от векторного поля a. Важно подчеркнуть, что это снова *вектор*, а вовсе не тензор второго ранга как кажется: $\nabla_\mu a \in C(TM)$. Тензор получается, когда мы рассматриваем объект $\nabla a = dx^\mu \nabla_\mu a \in C(T^1_1 M)$. Эту разницу важно понимать, когда мы вычисляем вторую ковариантную производную. Именно,

$$\nabla_\mu \nabla_\nu a = \nabla_\mu \nabla_\nu (a^\lambda \partial_\lambda) = \nabla_\mu (\partial_\nu a^\lambda + \Gamma_{\kappa\nu}^\lambda a^\kappa)\partial_\lambda = a^\lambda{}_{;\underline{\nu\mu}} \partial_\lambda, \tag{A.1}$$

где

$$a^\lambda{}_{;\underline{\nu\mu}} = \partial_\nu (\partial_\nu a^\lambda + \Gamma_{\kappa\nu}^\lambda a^\kappa) + \Gamma_{\rho\mu}^\lambda (\partial_\nu a^\rho + \Gamma_{\kappa\nu}^\rho a^\kappa). \tag{A.2}$$

Неудобство такого обозначения состоит в том, что числа $a^\lambda{}_{;\underline{\nu\mu}}$ не преобразуются как компоненты тензора.

В то же время для второго объекта мы имеем

$$\begin{aligned}\nabla\nabla a = dx^\mu \otimes \nabla_\mu (dx^\nu \otimes \nabla_\nu a) = dx^\mu \otimes (\nabla_\mu dx^\nu) \otimes \nabla_\nu a + dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes \nabla_\mu \nabla_\nu a \\ = dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes \nabla_\mu \nabla_\nu a - \Gamma_{\nu\mu}^\rho dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes \nabla_\rho a = a^\lambda{}_{;\nu\mu}\, dx^\mu \otimes dx^\nu \otimes \partial_\lambda,\end{aligned} \tag{A.3}$$

где

$$a^\lambda{}_{;\nu\mu} = a^\lambda{}_{;\underline{\nu\mu}} - \Gamma_{\nu\mu}^\rho (\partial_\rho a^\lambda + \Gamma_{\sigma\rho}^\lambda a^\sigma). \tag{A.4}$$

Этот набор чисел уже преобразуется как компоненты тензора третьего ранга, поскольку они определены через объект $\nabla\nabla a \in C(T^1_2 M)$.

Замечательное свойство состоит в том, что антисимметризация по индексам μ и ν для двух значков дает один и тот же результат для связности без кручения:

$$a^\lambda{}_{;\underline{\nu\mu}} - a^\lambda{}_{;\underline{\mu\nu}} = a^\lambda{}_{;\nu\mu} - a^\lambda{}_{;\mu\nu} = R^\lambda{}_{\kappa\mu\nu} a^\kappa. \tag{A.5}$$

Это связано с тем, что второе слагаемое в (A.4) симметрично по индексам μ и ν.

Разумеется, эти рассуждения легко обобщаются на произвольное тензорное поле $a \in C(T^m_n M)$.