Лекция 1
Операторные разложения и конформные блоки

1.1. Локальные операторы и операторная алгебра

Рассмотрим некоторую двумерную квантовую теорию поля. Обычно квантовая теория поля определяется алгеброй локальных операторов. Мы уточним понятие локальных операторов и понятие операторной алгебры немного позже, а сейчас введем обозначения. В двумерном пространстве имеет смысл использовать координаты светового конуса в пространстве Минковского

$$z = x^1 - x^0 = x^1 + \mathrm{i}x^2, \qquad \bar{z} = x^1 + x^0 = x^1 - \mathrm{i}x^2,$$

являющиеся одновременно комплексными координатами в эвклидовом пространстве. Очевидно,

$$x^2 \equiv x^\mu x_\mu = -z\bar{z} = -|x|^2$$

и

$$\partial \equiv \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_1 - \partial_0) = \frac{1}{2}(\partial_1 - \mathrm{i}\partial_2), \qquad \bar{\partial} \equiv \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_1 + \partial_0) = \frac{1}{2}(\partial_1 + \mathrm{i}\partial_2).$$

Понятие квазилокальных операторов мы будем считать интуитивно ясным. Более или менее, это операторы $A(x), B(x), \ldots$, зависящие от точки в пространстве x, для которых можно определить T-упорядоченные корреляционные функции $\langle A(x_1)B(x_2)\cdots\rangle$, которые были бы непрерывны по переменным x_i за исключением точек $x_i = x_j$.

Будем говорить, что два оператора $A(x)$ и $B(x)$ *взаимно-локальны*, если любая (T-упорядоченная!) корреляционная функция вида

$$\langle A(x_1)B(x_2)\cdots\rangle$$

является однозначной непрерывной функцией переменной x_1 в некоторой окрестности точки $x_1 = x_2$ в *эвклидовом* пространстве. Оператор $A(x)$ называется *локальным*, если он взаимно-локален самому себе.

Оказывается, локальность накладывает на оператор довольно жесткие условия. Чтобы их сформулировать, давайте введем понятие спина оператора. В двумерном пространстве-времени это понятие относится именно к операторам, а не к состояниям и не к частицам. Действительно, в двумерном пространстве-времени нет пространственных вращений, поэтому невозможно определить спин состояния, можно определить только его пространственную четность. Однако мы можем осуществлять преобразования Лоренца (в пространстве Минковского) или повороты (в эвклидовом пространстве) вокруг неподвижной точки x, в которой находится оператор. Поэтому можно определить *лоренцевы спины* s_i операторов A_i, такие что при преобразовании

$$A_i(z, \bar{z}) \to \mathrm{e}^{s_i\lambda} A_i(z\mathrm{e}^{\lambda}, \bar{z}\mathrm{e}^{-\lambda}) \tag{1}$$

(T-упорядоченные) корреляционные функции операторов A_i не меняются.

Можно показать, что оператор $A(x)$ с определенным спином является локальным, если

1. Спин s_A — целый или полуцелый.

2. Операторы $A(x_1)$ и $A(x_2)$ в один и тот же момент времени в разных точках коммутируют или антикоммутируют:

$$A(x^0, x_1^1)A(x^0, x_2^1) = (-1)^{2s_A} A(x^0, x_2^1)A(x^0, x_1^1), \qquad x_1^1 \neq x_2^1.$$

Локальные операторы $A(x)$ и $B(x)$ с определенным спином являются взаимно-локальными, если

$$A(x^0, x_1^1)B(x^0, x_2^1) = (-1)^{4s_A s_B} B(x^0, x_2^1)A(x^0, x_1^1), \qquad x_1^1 \neq x_2^1.$$

Множество локальных операторов не является пространством, однако в пространстве полей имеются подпространства взаимно-локальных операторов, которые могут, конечно, пересекаться друг с другом. Давайте возьмем одно такое подпространство $\mathcal{O}$, состоящее из попарно взаимно-локальных операторов, максимальное в том смысле, что любой оператор, не принадлежащий этому пространству, не взаимно-локален хотя бы одному оператору из $\mathcal{O}$. Пространство $\mathcal{O}$ можно наделить структурой алгебры относительно произведения операторов. Выберем какой-нибудь базис $\{O_I\}$ в пространстве $\mathcal{O}$ и рассмотрим операторные разложения

$$O_I(x)O_J(0) = \sum_k F_{IJ}^K(x)O_K(0).$$

Разумеется, сумма в правой части бесконечна, а равенство понимается как равенство для корреляционных функций:

$$\langle O_I(x)O_J(0)\cdots\rangle = \sum_K F_{IJ}^K(x)\langle O_K(0)\cdots\rangle.$$

Коэффициенты $F_{IJ}^K(x)$ называются структурными функциями операторной алгебры. Вместе с вакуумными средними локальных полей

$$G_I = \langle O_I(x)\rangle$$

структурные функции, в принципе, полностью определяют все корреляционные функции локальных операторов. Например, четырехточечную корреляционную функцию можно записать в виде

$$\langle O_I(x_1)O_J(x_2)O_K(x_3)O_L(x_4)\rangle = \sum_{M_1,M_2,M_3} G_{M_3}F_{IM_2}^{M_3}(x_1-x_4)F_{JM_1}^{M_2}(x_2-x_4)F_{KL}^{M_1}(x_3-x_4).$$

Разумеется, разложения можно выполнять в различном порядке, и это накладывает определенные соотношения на функции $F_{IJ}^K(x)$ и константы G_I. Ниже мы обсудим эти соотношения в случае конформной теории поля.

1.2. Конформная теория поля. Глобальные конформные преобразования. Кроссинг-симметрия

В конформной теории поля, помимо преобразования (1) имеются дополнительные преобразования, оставляющие корреляционные функции инвариантными. Именно, пусть

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \bar f(\bar z) = \frac{\bar a\bar z+\bar b}{\bar c\bar z+\bar d} \tag{2}$$

— дробно-рациональные функции с некоторыми константами $a,\ldots,\bar d$. В пространстве Минковского все эти константы вещественны независимы, в то время как в эвклидовом пространстве они комплексны и буквы с чертой комплексно сопряжены соответствующим буквам без черты. Мы можем выбрать такой базис в $\mathcal{O}$, чтобы корреляционные функции были инвариантны преобразований

$$O_I(z,\bar z) \to (f'(z))^{\Delta_I}(\bar f'(\bar z))^{\bar\Delta_I}O_I(f(z),\bar f(\bar z)).$$

Величины Δ_I и $\bar\Delta_I$ называются соответственно правой («голоморфной») и левой («антиголоморфной») конформными размерностями поля $O_I(x)$. Разность конформных размерностей $s_I = \Delta_I - \bar\Delta_I$ равна спину, а сумма $d_I = \Delta_I + \bar\Delta_I$ — масштабной размерности оператора.

Вследствие конформной симметрии структурные функции имеют простой вид

$$F_{IJ}^K(z,\bar z) = C_{IJ}^K z^{\Delta_K-\Delta_I-\Delta_J}\bar z^{\bar\Delta_K-\bar\Delta_I-\bar\Delta_J},$$

однако *структурные константы* C_{IJ}^K полностью не фиксируются глобальной конформной симметрией. Имеется ограничение на вакуумные средние:

$$\langle A\rangle = 0, \quad \text{если } \Delta_A \neq 0 \text{ или } \bar\Delta_A \neq 0.$$

Также имеется ограничение на парные корреляционные функции:

$$\langle A(x)B(x)\rangle = 0, \quad \text{если } \Delta_A \neq \Delta_B \text{ или } \bar\Delta_A \neq \bar\Delta_B.$$

Мы ограничимся случаем, когда имеется единственный оператор нулевой размерности $O_0(x) = 1$ (единичный оператор). Тогда

$$G_I = \delta_{I,0}, \qquad C_{IJ}^0 = 0, \quad \text{если } \Delta_I \neq \Delta_J \text{ или } \bar\Delta_I \neq \bar\Delta_J.$$

Если матрица $C_{IJ} = C^0_{IJ}$ невырожденная, мы можем рассматривать обратную к ней матрицу C^{IJ} как метрику на пространстве $\mathcal{O}$. Мы будем называть оператор

$$O^I = C^{IJ} O_J$$

сопряженным к оператору O_I.

В этом случае нетрудно найти некоторое уравнение на структурные константы. Рассмотрим произведение трех операторов $O_I(x_2)O_J(x_1)O_K(0)$. В ней можно применить операторное разложение несколькими способами. Рассмотрим два из них. Во-первых, разложим сначала по x_1, а потом по x_2 вблизи нуля. Мы получаем

$$O_I(x_2)O_J(x_1)O_K(0) = F^L_{IM}(x_2)F^M_{JK}(x_1)O_L(0),$$

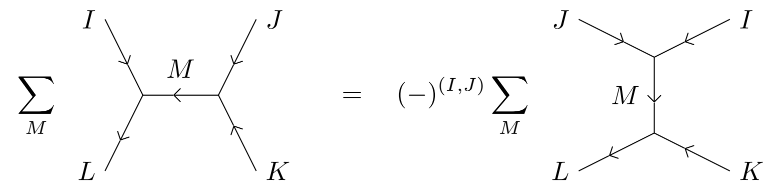
где подразумевается суммирование по повторяющимся верхнему и нижнему индексу. Разложим теперь сначала по x_1 вблизи x_2, а потом по x_2 вблизи нуля:

$$O_I(x_2)O_J(x_1)O_K(0) = (-)^{(I,J)} F^L_{MK}(x_2)F^M_{JI}(x_1 - x_2)O_L(0),$$

где $(-)^{(I,J)} \overset{\text{def}}{=} (-)^{4s_I s_J}$. Из равенства левых частей этих уравнений следует равенство коэффициентов в правых частях:

$$F^L_{IM}(x_2)F^M_{JK}(x_1) = (-)^{(I,J)} F^L_{MK}(x_2)F^M_{JI}(x_1 - x_2). \tag{3}$$

Это уравнение, условие ассоциативности операторной алгебры, носит также название условия *кроссинг-симметрии.* Его удобно изобразить графически:



Нижние индексы в структурных функциях всегда идут по часовой стрелке.

Рассмотрим теперь корреляционную функцию

$$\begin{aligned}\langle O^L(x_3)O_I(x_2)O_J(x_1)O_K(0)\rangle &= z_3^{-2\Delta_L}\bar{z}_3^{-2\bar{\Delta}_L} F^L_{IM}(x_2)F^M_{JK}(x_1)\\ &= (-)^{(I,J)} z_3^{-2\Delta_L}\bar{z}_3^{-2\bar{\Delta}_L} F^L_{MK}(x_2)F^M_{JI}(x_1 - x_2).\end{aligned} \tag{4}$$

Известно, что дробно-линейное преобразование (2) позволяет переместить три точки на комплексной сфере (плоскость + бесконечность) в любые три заданные точки. Давайте совершим преобразование, при котором точка 0 останется на месте, x_2 перейдет в 1, а x_3 — в ∞. При этом точка x_1 перейдет в какую-то точку, которую мы обозначим через $x = (z, \bar{z})$. Это преобразование имеет вид

$$f(w) = \frac{(x_2 - x_3)w}{x_2(w - x_3)}.$$

Очевидно, $z = \frac{x_1(x_2-x_3)}{x_2(x_1-x_3)}$. Чтобы корреляционная функция была хорошо определена после такого преобразования, мы должны сказать, что мы понимаем под $O^L(\infty,\infty)$. Логично сократить префактор в (4), определив этот оператор как

$$O^L(\infty,\infty) = \lim_{\substack{z\to\infty\\ \bar{z}\to\infty}} z^{2\Delta_L}\bar{z}^{2\bar{\Delta}_L} O^L(z,\bar{z}).$$

Тогда

$$\langle O^L(\infty,\infty)O_I(1,1)O_J(z,\bar{z})O_K(0,0)\rangle = F^L_{IM}(1,1)F^M_{JK}(z,\bar{z}) = (-)^{(I,J)} F^L_{MK}(1,1)F^M_{JI}(z-1,\bar{z}-1).$$

1.3. Алгебра Вирасоро

На следующем шаге учтем более высокую симметрию, которая возникает в конформной теории поля. Пусть $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса согласно стандартному определению в эвклидовом пространстве. В координатах $(z,\bar z)$ он имеет следующие компоненты:

$$T_{zz}=2\pi T(z,\bar z),\qquad T_{\bar z\bar z}=2\pi\bar T(z,\bar z),\qquad T_{z\bar z}=T_{\bar z z}=-2\pi\Theta(z,\bar z).$$

Закон сохранения энергии-импульса имеет вид

$$\bar\partial T=\partial\Theta,\qquad \partial\bar T=\bar\partial\Theta.$$

В конформной теории поля $\Theta=0$, откуда следует

$$\bar\partial T=\partial\bar T=0,$$

то есть T является функцией только переменной z (аналитической функцией в случае эвклидова пространства), а $\bar T$ является функцией только переменной $\bar z$. Это приводит к бесконечному набору интегралов движения

$$L_n=\oint\frac{dz}{2\pi\mathrm{i}}\,z^{n+1}T(z),\qquad \bar L_n=\oint\frac{d\bar z}{2\pi\mathrm{i}}\,\bar z^{n+1}\bar T(\bar z),\qquad n\in\mathbb{Z}.$$

Мы здесь записываем интегралы по замкнутому контуру вокруг начала координат, поскольку в конформной теории поля нам удобно пользоваться картиной радиального квантования. Положим

$$z=\mathrm{e}^{\tau+\mathrm{i}\sigma},\qquad \bar z=\mathrm{e}^{\tau-\mathrm{i}\sigma}.$$

Переменную $\tau\in\mathbb{R}$ мы будем считать мнимым временем, а $\sigma\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ — пространственной координатой. Таким образом, кривыми постоянного времени мы будем считать окружности в плоскости $(z,\bar z)$, точкой бесконечного прошлого считать точку 0, а точкой бесконечного будущего — бесконечность. В переменных (τ,σ) конформная теория поля превращается в теорию на цилиндре. Сохранение величин L_n, $\bar L_n$ означает, что их корреляционные функции не меняются при деформации контуров, если контур в процессе деформации не пересекает точек, в которых находятся какие-нибудь локальные поля.

Напомню, что компоненты тензора энергии импульса имеют операторные разложения вида

$$T(z')T(z)=\frac{c/2}{(z'-z)^4}+\frac{2T(z)}{(z'-z)^2}+\frac{\partial T(z)}{z'-z}+O(1),$$

и аналогичное для $\bar T(\bar z)$. Величина c является числом для каждой данной теории. Из операторных разложений выводятся коммутационные соотношения для операторов L_n, $\bar L_n$:

$$[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n}+\frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0},\tag{5a}$$

$$[\bar L_m,\bar L_n]=(m-n)\bar L_{m+n}+\frac{\bar c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0},\tag{5b}$$

$$[L_m,\bar L_n]=0.\tag{5c}$$

Алгебра вида (5a) (или (5b)) носит название *алгебры Вирасоро*,[1] а величина c (или $\bar c$) называется *центральным зарядом* алгебры Вирасоро.[2] Мы будем рассматривать здесь только такие теории, в которых центральные заряды правой и левой алгебр равны, $\bar c=c$, хотя интересные теории могут и не удовлетворять этому условию.

Полезно определить действие операторов L_n, $\bar L_n$ на операторы. Именно, для любого оператора $A(x)$ положим

$$(\mathcal{L}_nA)(x)=\oint\frac{dw}{2\pi\mathrm{i}}(w-z)^{n+1}T(w)A(x),\qquad (\bar{\mathcal{L}}_nA)(x)=\oint\frac{d\bar w}{2\pi\mathrm{i}}(\bar w-\bar z)^{n+1}\bar T(\bar w)A(x).\tag{6}$$

[1]Правильнее, конечно, говорить «Виразоро», но, увы, неправильное произношение прижилось.

[2]Правильнее сказать, что элемент c является центральным элементом, то есть элементом, коммутирующим со всеми элементами алгебры. Центральным зарядом называется значение этого элемента на представлении, в котором этот элемент представляется числом. Каждой конформной теории поля отвечает набор представлений с одинаковым центральным зарядом.

Интегралы берутся по маленьким окружностям вокруг z и $\bar{z}$ соответственно. Такая конструкция основана на соответствии между операторами и состояниями в картине радиального квантования. Пусть у нас есть оператор $A(x)$. Тогда мы можем определить состояние $|A\rangle = A(0)|0\rangle$, где $|0\rangle$ — вакуумное состояние, определяемое условием

$$\langle 0|X|0\rangle = \langle X\rangle.$$

Очевидно,

$$L_n|0\rangle = \bar{L}_n|0\rangle = 0, \qquad \langle 0|L_{-n} = \langle 0|\bar{L}_{-n} = 0, \qquad n \geq -1.$$

В обратную сторону, если имеется состояние $|A\rangle$, можно определить оператор $A \in \mathcal{O}$ следующим образом. Корреляционная функция $\langle B_1(x_1)\cdots B_k(x_k)A(x)\rangle$, $B_i \in \mathcal{O}$, *определяется* как матричный элемент $\langle 0|B_1(x_1 - x)\cdots B_k(x_k - x)|A\rangle$. Это определение использует трансляционную инвариантность корреляционных функций в плоскости $(z, \bar{z})$.

Таким образом, *между состояниями и локальными операторами в конформной теории поля имеется взаимно-однозначное соответствие*. Действие (6) согласовано с этим соответствием. Следовательно, как состояния, так и операторы могут быть классифицированы по представлениям алгебры Вирасоро.

Прежде всего заметим, что операторы L_{-1} и $\bar{L}_{-1}$ порождают сдвиги по координатам z и $\bar{z}$:

$$[L_{-1}, A(x)] = \partial A(x), \qquad [\bar{L}_{-1}, A(x)] = \bar{\partial} A(x) \tag{7}$$

и, одновременно,

$$\mathcal{L}_{-1} = \partial, \qquad \bar{\mathcal{L}}_{-1} = \bar{\partial}.$$

Это единственная пара операторов, для которых связь между действием на оператор и коммутатором так проста. В общем случае эта связь имеет вид

$$[L_n, A(x)] = \sum_{k=-1}^{\infty} \binom{n+1}{k+1} z^{n-k} (\mathcal{L}_k A)(x). \tag{8}$$

Операторы L_0 и $\bar{L}_0$ порождают масштабные преобразования по z и $\bar{z}$:

$$\mathcal{L}_0 A(x) = \Delta_A A(x), \qquad \bar{\mathcal{L}}_0 A(x) = \bar{\Delta}_A A(x).$$

Таким образом $s = L_0 - \bar{L}_0$ представляет собой оператор спина, а $D = L_0 + \bar{L}_0$ — оператор дилатации.

Операторы L_1, $\bar{L}_1$ имеют более сложный смысл. Они порождают композицию трех преобразований: инверсия, сдвиг, инверсия. Таким образом, тройка (L_{-1}, L_0, L_1) является алгеброй Ли $sl(2)$, отвечающей группе дробно-линейных преобразований $SL(2)$. Эта группа является глобальной группой преобразований комплексной сферы. Можно думать, что именно поэтому, она не получает аномалии: центральный элемент c не дает вклада в эту подалгебру.

На цилиндре (τ, σ) оператор дилатации D (с некоторой сдвижкой, которую мы не будем обсуждать) имеет смысл гамильтониана. Поэтому состояния в картине радиального квантования могут возникать только представления, ограниченные снизу по собственным значениям L_0 и $\bar{L}_0$. Поэтому мы будем рассматривать *представления со старшим весом*, то есть представления, которые могут быть порождены алгеброй Вирасоро из *вектора старшего веса* $|\Delta\rangle$, удовлетворяющего соотношениям

$$L_0|\Delta\rangle = \Delta|\Delta\rangle, \qquad L_n|\Delta\rangle = 0 \quad (n > 0). \tag{9}$$

Все остальные векторы представления порождаются из старшего вектора операторами L_{-n} $(n > 0)$. Все такие представления являются фактор-представлениями свободно-порожденного представления $M_{c,\Delta}$, называемого *модулем Верма*:

$$M_{c,\Delta} = \operatorname{span}\Big\{ L_{-n_1} L_{-n_2} \cdots L_{-n_k} |\Delta\rangle \;\Big|\; k = 0, 1, 2, \ldots;\ n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k \Big\}. \tag{10}$$

Модуль Верма, вообще говоря, приводим, но приводим только при специальных значениях старшего веса Δ. Хотя потом мы будем рассматривать именно эти специальные значения, пока мы рассмотрим точки общего положения, где модуль Верма неприводим. Отметим только, что значение $\Delta = 0$ представляет собой такое специальное значение, так что физическому вакууму отвечает представление, в котором $L_{-1}|0\rangle = 0$.

Поскольку на пространстве состояний действуют две алгебры Вирасоро, пространство состояний может быть разбито в сумму произведений представлений алгебры Вирасоро. Пусть W_α, $\bar{W}_\alpha$ — некоторые представления алгебры Вирасоро. Тогда пространство состояний имеет вид

$$\mathcal{H} = \bigoplus_\alpha W_\alpha \otimes \bar{W}_\alpha.$$

На пространстве W_α действует правая алгебра Вирасоро (L_n), а на $\bar{W}_\alpha$ — левая ($\bar{L}_n$). При этом, вообще говоря, не предполагается, что $\bar{W}_\alpha$ изоморфно W_α или хотя бы имеет тот же старший вес.

Так как мы рассматриваем представления со старшим весом, все пространство состояний классифицируется парами старших весов $(\Delta_\alpha, \bar{\Delta}_\alpha)$. Векторам старшего веса отвечают специальные операторы, называемые *первичными* (или *примарными*) операторами Φ_α. Из условия

$$(\mathcal{L}_0\Phi_\alpha)(x) = \Delta_\alpha\Phi_\alpha(x), \qquad (\bar{\mathcal{L}}_0\Phi_\alpha)(x) = \bar{\Delta}_\alpha\Phi_\alpha(x),$$
$$(\mathcal{L}_n\Phi_\alpha)(x) = (\bar{\mathcal{L}}_n\Phi_\alpha)(x) = 0 \quad (n > 0).$$

С учетом соотношений (7) это ведет к операторному разложению

$$T(z')\Phi_\alpha(x) = \frac{\Delta_\alpha\Phi_\alpha(x)}{(z'-z)^2} + \frac{\partial\Phi_\alpha(x)}{z'-z} + O(1) \tag{11}$$

(аналогично для $\bar{T}(z)$), а коммутационное соотношение (8) принимает вид

$$[L_n, \Phi_\alpha(x)] = (n+1)\Delta_\alpha z^n\Phi_\alpha(x) + z^{n+1}\partial\Phi_\alpha(x). \tag{12}$$

Все остальные операторы в представлении произведения алгебр Вирасоро получаются действием операторов $\mathcal{L}_{-n}$, $\bar{\mathcal{L}}_{-n}$ $(n > 0)$ и называются *вторичными* операторами или *потомками.*

Для нас важно то, что эти соотношения фиксируют отношения структурных констант. Рассмотрим операторное разложение двух первичных полей:

$$\Phi_\alpha(x)\Phi_\beta(0) = \sum_{\substack{\gamma,k,\bar{k} \\ n_1\le\ldots\le n_k \\ \bar{n}_1\le\ldots\le\bar{n}_{\bar{k}}}} F_{\alpha\beta}^{\gamma(n_1,\ldots,n_k;\bar{n}_1,\ldots\bar{n}_{\bar{k}})}(x)\mathcal{L}_{-n_1}\cdots\mathcal{L}_{-n_k}\bar{\mathcal{L}}_{-\bar{n}_1}\cdots\bar{\mathcal{L}}_{-\bar{n}_{\bar{k}}}\Phi_\gamma(0), \tag{13}$$

где, очевидно, структурные функции выражаются через структурные константы

$$F_{\alpha\beta}^{\gamma(n_1,\ldots,n_k;\bar{n}_1,\ldots\bar{n}_{\bar{k}})}(z,\bar{z}) = z^{\Delta_\gamma-\Delta_\alpha-\Delta_\beta+\sum n_i}\bar{z}^{\bar{\Delta}_\gamma-\bar{\Delta}_\alpha-\bar{\Delta}_\beta+\sum\bar{n}_i}C_{\alpha\beta}^{\gamma(n_1,\ldots,n_k;\bar{n}_1,\ldots\bar{n}_{\bar{k}})}. \tag{14}$$

Структурные константы $C_{\alpha\beta}^{\gamma(\cdots)}$, в свою очередь, факторизуются

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma(n_1,\ldots,n_k;\bar{n}_1,\ldots\bar{n}_{\bar{k}})} = C_{\alpha\beta}^\gamma B_{\alpha\beta}^{\gamma(n_1,\ldots,n_k)}\bar{B}_{\alpha\beta}^{\gamma(\bar{n}_1,\ldots\bar{n}_{\bar{k}})}, \qquad B_{\alpha\beta}^{\gamma(\varnothing)} = \bar{B}_{\alpha\beta}^{\gamma(\varnothing)} \stackrel{\text{def}}{=} 1. \tag{15}$$

Важно то, что коэффициенты $B_{\alpha\beta}^{\gamma(\cdots)}$, $\bar{B}_{\alpha\beta}^{\gamma(\cdots)}$ полностью определяются конформной симметрией.

Прежде всего выделим интересующее нас слагаемое, причем оставим в нем только правую киральность. Используя соответствие между операторами и состояниями, условно запишем это так

$$\Phi_\alpha(x)|\Phi_\beta\rangle \sim \sum_{\vec{n}} z^{\Delta_\gamma-\Delta_\alpha-\Delta_\beta+\sum n_i}B_{\alpha\beta}^{\gamma(\vec{n})}|\Phi_\gamma^{(\vec{n})}\rangle, \qquad |\Phi_\gamma^{\vec{n}}\rangle = L_{-n_1}\cdots L_{-n_k}|\Phi_\gamma\rangle, \tag{16}$$

где сумма подразумевается по всем наборам $\vec{n} = (n_1,\ldots,n_k)$, то есть, условно говоря, по всем потомкам. Мы будем также пользоваться обозначением

$$|\vec{n}| = \sum_{i=1}^k n_i.$$

Применим к левой части оператор L_n с $n>0$:

$$L_n\Phi_\alpha(x)|\Phi_\beta\rangle = (n+1)\Delta_\alpha z^n\Phi_\alpha(x)|\Phi_\beta\rangle + z^{n+1}\partial\Phi_\alpha(x)|\Phi_\beta\rangle \\ \sim \sum_{\vec{n}} (n\Delta_\alpha+\Delta_\gamma-\Delta_\beta+|\vec{n}|)\, z^{\Delta_\gamma-\Delta_\alpha-\Delta_\beta+|\vec{n}|+n} B^{\gamma(\vec{n})}_{\alpha\beta}|\Phi^{(\vec{n})}_\gamma\rangle. \tag{17}$$

Теперь подействуем оператором L_n прямо на правую часть (16):

$$\sum z^{\Delta_\gamma-\Delta_\alpha-\Delta_\beta+|\vec{n}|} B^{\gamma(\vec{n})}_{\alpha\beta} L_n|\Phi^{(\vec{n})}_\gamma\rangle$$

Вектор $L_n|\Phi^{(\vec{n})}_\gamma\rangle$ представляет собой некоторый потомок уровня $N=|\vec{n}|-n$, то есть линейную комбинацию векторов $|\Phi^{(\vec{n}')}_\gamma\rangle$ с $|\vec{n}'|=N$. Сравнивая коэффициенты в этих двух выражениях при одинаковых базисных векторах $|\Phi^{(\vec{n}')}_\gamma\rangle$, можно найти уравнения на коэффициенты B. Чтобы найти эти уравнения более явно, рассмотрим матричные элементы

$$\langle\vec{m}|\vec{n}\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle\Phi^{\gamma(\vec{m})}|\Phi^{(\vec{n})}_\gamma\rangle = \langle\Phi^\gamma|L_{m_l}\cdots L_{m_1}L_{-n_1}\cdots L_{-n_k}|\Phi_\gamma\rangle.$$

Эти матричные элементы на каждом данном уровне N образуют матрицу, называемую *матрицей Шаповалова*.

Пусть $N=|\vec{m}|$. Из соотношения (17) имеем

$$\langle\Phi^{\gamma(\vec{m})}|\Phi_\alpha(x)|\Phi_\beta\rangle \sim \sum_{\vec{n}} z^{\Delta_\gamma-\Delta_\alpha-\Delta_\beta+N+|\vec{n}|} K^{(\vec{m})}_{(\vec{n})} B^{(\vec{n})}\langle\varnothing|\vec{n}\rangle = z^{\Delta_\gamma-\Delta_\alpha-\Delta_\beta+N} K^{(\vec{m})}_{(\varnothing)},$$

где в правой части мы опустили все лишние индексы. Коэффициенты $K^{(\vec{m})}_{(\vec{n})}$ могут быть получены аналогично коэффициентам в (17). Нужный нам коэффициент $K^{(\vec{m})}_{(\varnothing)}$ равен

$$K^{(\vec{m})}_{(\varnothing)} = K^{(\vec{m})} \equiv \prod_{i=1}^{l}\left(m_i\Delta_\alpha+\Delta_\gamma-\Delta_\beta+\sum_{j=1}^{i-1}m_j\right)$$

С другой стороны,

$$\langle\Phi^{\gamma(\vec{m})}|\Phi_\alpha(x)|\Phi_\beta\rangle \sim z^{\Delta_\gamma-\Delta_\alpha-\Delta_\beta+N}\sum_{\vec{n},\ |\vec{n}|=N} B^{(\vec{n})}\langle\vec{m}|\vec{n}\rangle.$$

Отсюда получаем уравнение для коэффициентов $B^{(\vec{n})}$:

$$\sum_{\vec{n},\ |\vec{n}|=N}\langle\vec{m}|\vec{n}\rangle B^{(\vec{n})} = K_{\vec{m}}, \qquad |\vec{m}|=N. \tag{18}$$

В точках общего положения матрица Шаповалова обратима и решение однозначно. Случай вырожденной матрицы Шаповалова мы рассмотрим немного позже.

Аналогично, хотя и несколько более громоздко, можно определить коэффициенты $B^{\gamma(\vec{n})}_{\alpha\beta(\vec{r})}$, возникающие в операторном разложении $\Phi_\alpha(x)\Phi^{(\vec{r})}_\beta(0)$. Самый простой способ определить эти коэффициенты такой. Сначала протащим операторы L_{r_i} влево через оператор $\Phi_\alpha(x)$ с помощью соотношения (12). Мы получим

$$L'_{-r_1}\cdots L'_{-r_s}\Phi_\alpha(x)|\Phi_\beta\rangle, \qquad L'_n = L_n+(n+1)\Delta_\alpha z^n + z^{n+1}\partial.$$

Далее применим уже известное операторное разложение к $\Phi_\alpha(x)|\Phi_\beta\rangle$, а потом подействуем операторами L'_{-r_i} на правую часть.

Заметим, что коэффициенты $B_{(\vec{r})}\equiv B^{(\varnothing)}_{(\vec{r})}$ можно вычислить почти явно. Они равны

$$B^\gamma_{\alpha\beta(\vec{r})} = z^{-d}D_{(\vec{r})}z^{d+N}, \qquad N=|\vec{r}|, \qquad d=\Delta_\gamma-\Delta_\alpha-\Delta_\beta, \tag{19}$$

где $D_{(\vec{r})}$ представляет собой дифференциальный оператор

$$D_{(\vec{r})} = ((-r_1+1)\Delta_\alpha z^{-r_1} + z^{-r_1+1}\partial)\cdots((-r_s+1)\Delta_\alpha z^{-r_s} + z^{-r_1+s}\partial). \tag{20}$$

Очевидно, выражение (19) не зависит от z.

Теперь рассмотрим корреляционную функцию первичных полей

$$G^{\alpha_N}_{\alpha_1\ldots\alpha_{N-1}}(x_2,\ldots,x_{N-1}) = \langle\Phi^{\alpha_N}|\Phi_{\alpha_{N-1}}(x_{N-1})\cdots\Phi_{\alpha_2}(x_2)|\Phi_{\alpha_1}\rangle. \tag{21}$$

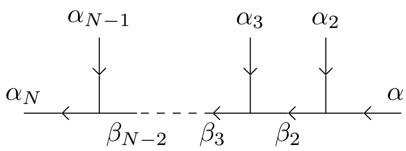
Для удобства мы положили $x_1 = 0$, $x_N = \infty$. Последовательно раскладывая эту корреляционную функцию в ряд по x_2, затем по x_3 и так далее до x_{N-1} вблизи нуля, мы получим

$$\begin{aligned} G^{\alpha_N}_{\alpha_1\ldots\alpha_{N-1}}(x_2,\ldots,x_{N-1}) = \sum_{\beta_2,\ldots,\beta_{N-2}} & C^{\alpha_N}_{\alpha_{N-1}\beta_{N-2}} C^{\beta_{N-2}}_{\alpha_{N-2}\beta_{N-3}} \cdots C^{\beta_2}_{\alpha_2\alpha_1} \\ & \times \mathcal{F}^{\alpha_N}_{\alpha_1\ldots\alpha_{N-1}}(\beta_2\ldots\beta_{N-2}|z_2,\ldots,z_{N-1})\bar{\mathcal{F}}^{\alpha_N}_{\alpha_1\ldots\alpha_{N-1}}(\beta_2\ldots\beta_{N-2}|\bar{z}_2,\ldots,\bar{z}_{N-1}), \end{aligned} \tag{22}$$

где функции $\mathcal{F}$, $\bar{\mathcal{F}}$, называемые *конформными блоками* определяются рядами

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}^{\alpha_N}_{\alpha_1\ldots\alpha_{N-1}}(\beta_2\ldots\beta_{N-2}|z_2,\ldots,z_{N-1}) \\ &\quad = \sum_{\vec{n}_2,\ldots,\vec{n}_{N-2}} z_{N-1}^{\Delta_{\alpha_N}-\Delta_{\alpha_{N-1}}-\Delta_{\beta_{N-2}}-|\vec{n}_{N-2}|} B^{\alpha_N}_{\alpha_{N-1}\beta_{N-2}(\vec{n}_{N-2})} \\ &\quad \times z_{N-2}^{\Delta_{\beta_{N-2}}-\Delta_{\alpha_{N-2}}-\Delta_{\beta_{N-3}}+|\vec{n}_{N-2}|-|\vec{n}_{n-3}|} B^{\beta_{N-2}(\vec{n}_{N-2})}_{\alpha_{N-2}\beta_{N-3}(\vec{n}_{N-3})} \\ &\quad\quad \times \cdots z_3^{\Delta_{\beta_3}-\Delta_{\alpha_3}-\Delta_{\beta_2}+|\vec{n}_3|-|\vec{n}_2|} B^{\beta_3(\vec{n}_3)}_{\alpha_3\beta_2(\vec{n}_2)} z_2^{\Delta_{\beta_2}-\Delta_{\alpha_2}-\Delta_{\alpha_1}+|\vec{n}_2|} B^{\beta_2(\vec{n}_2)}_{\alpha_2\alpha_1}. \end{aligned} \tag{23}$$

Графически конформный блок можно изобразить «гребенкой», на которой отмечены внешние «ноги» отвечают операторам Φ_{α_i}, а промежуточные линии отвечают представлениям W_{β_i}:



Важно заметить, что выражение (23) однозначно определяет конформные блоки, причем конформные блоки однозначно определяются набором размерностей полей $(\Delta_{\alpha_i})_{i=1}^N$, $(\Delta_{\beta_i})_{i=2}^{N-2}$, и не зависит от конкретного набора полей, входящих в теорию. От конкретного набора полей зависят структурные константы для первичных полей $C^\gamma_{\alpha\beta}$.

Рассмотрим частный случай четырехточечной корреляционной функции. Для простоты положим $x_3 = (1,1)$ и будем опускать эту переменную. Тогда

$$G^{\alpha_4}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(x) = \sum_\beta C^{\alpha_4}_{\alpha_3\beta} C^\beta_{\alpha_2\alpha_1} \mathcal{F}^{\alpha_4}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(\beta|z)\bar{\mathcal{F}}^{\alpha_4}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(\beta|\bar{z}). \tag{24}$$

При этом

$$\mathcal{F}^{\alpha_4}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(\beta|z) = \sum_{\vec{n}} B^{\alpha_4}_{\alpha_3\beta(\vec{n})} B^{\beta(\vec{n})}_{\alpha_2\alpha_1} z^{\Delta_\beta-\Delta_{\alpha_1}-\Delta_{\alpha_2}+|\vec{n}|}. \tag{25}$$

Теперь мы хотим найти уравнения на структурные константы, связанные с кроссинг-симметрией (3). Переписывать это уравнение с помощью конформных блоков несколько неудобно, поскольку потребует от нас введения новых конформных блоков вида

$$\mathcal{F}^{\alpha_4 *}_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}(\beta|z) = \sum_{\vec{n}} B^{\alpha_4}_{\beta(\vec{n})\alpha_1} B^{\beta(\vec{n})}_{\alpha_2\alpha_3}(z-1)^{\Delta_\beta-\Delta_{\alpha_2}-\Delta_{\alpha_3}+|\vec{n}|}.$$

Числа $B^{\alpha_4}_{\beta(\vec{n})\alpha_1}$ не совпадают с числами $B^{\alpha_4}_{\alpha_1\beta(\vec{n})}$, что, в дальнейшем, может усложнять вычисления. Поэтому мы найдем условия совместности несколько в другом, более практичном, виде. Воспользуемся для этого конформным преобразованием $z \to 1-z$. Тогда мы получаем

$$\langle\Phi^{\alpha_4}(\infty,\infty)\Phi_{\alpha_3}(1,1)\Phi_{\alpha_2}(z,\bar z)\Phi_{\alpha_1}(0,0)\rangle=\langle\Phi^{\alpha_4}(\infty,\infty)\Phi_{\alpha_3}(0,0)\Phi_{\alpha_2}(1-z,1-\bar z)\Phi_{\alpha_1}(1,1)\rangle$$
$$=(-)^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}\langle\Phi^{\alpha_4}(\infty,\infty)\Phi_{\alpha_1}(1,1)\Phi_{\alpha_2}(1-z,1-\bar z)\Phi_{\alpha_3}(0,0)\rangle,$$

где $(-)^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}=(-)^{(\alpha_1,\alpha_2)+(\alpha_1,\alpha_3)+(\alpha_2,\alpha_3)}$. Отсюда мы немедленно получаем

$$\sum_\beta C^{\alpha_4}_{\alpha_3\beta}C^\beta_{\alpha_2\alpha_1}\mathcal F^{\alpha_4}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(\beta|z)\bar{\mathcal F}^{\alpha_4}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(\beta|\bar z)$$
$$=(-)^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}\sum_\beta C^{\alpha_4}_{\alpha_1\beta}C^\beta_{\alpha_2\alpha_3}\mathcal F^{\alpha_4}_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}(\beta|1-z)\bar{\mathcal F}^{\alpha_4}_{\alpha_3\alpha_1\alpha_3}(\beta|1-\bar z)\quad(26)$$

Чтобы корреляционная функция могла быть однозначно продолжена в пространство Минковского левая и правая части должны быть определены и равны не только когда z и $\bar z$ комплексно-сопряжены, но и при любых значениях переменных. Если мы зафиксируем $\bar z$, это означает, что между конформными блоками $\mathcal F$ должно быть линейное соотношение. Мы предположим, что оно обратимо:

$$\mathcal F^{\alpha_4}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(\beta|z)=\sum_{\beta'}X^{\alpha_4}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(\beta,\beta')\mathcal F^{\alpha_4}_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}(\beta'|1-z).\quad(27)$$

Аналогичное соотношение должно иметь место для $\bar{\mathcal F}$. Строго говоря, мы не знаем строгого доказательства такого соотношения в общем случае. Скорее, следует считать, что наличие такого соотношения представляет собой требование к разумной конформной теории поля. Ниже мы увидим, что такое соотношение верно для минимальных моделей.

Подставляя (27) в (26), получаем уравнение на структурные константы:

$$\sum_\beta C^{\alpha_4}_{\alpha_3\beta}C^\beta_{\alpha_2\alpha_1}X^{\alpha_4}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(\beta,\beta')\bar X^{\alpha_4}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(\beta,\beta'')=(-)^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}\delta_{\beta'\beta''}C^{\alpha_4}_{\alpha_1\beta'}C^{\beta'}_{\alpha_2\alpha_3}.\quad(28)$$

Таким образом, вычисление *коэффициентов перехода* $X^{\alpha_4}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(\beta,\beta')$, $\bar X^{\alpha_4}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(\beta,\beta')$ представляет собой важнейший шаг в вычислении структурных констант. По сути, именно эту задачу в случае минимальных моделей эффективно решает представление свободными полями, которому будут посвящены остальные лекции.

1.4. Вырожденные представления и вырожденные операторы. Минимальные конформные модели

Мы уже говорили, что для общих значений старшего веса (c,Δ), модуль Верма $M_{c,\Delta}$ не вырожден, то есть представляет собой неприводимое представление. Однако в специальных случаях это может быть не так. Предположим, что модуль верма содержит *нуль-вектор*, то есть вектор $|v_0\rangle$ уровня $N>0$, удовлетворяющий условиям старшего вектора

$$L_0|v\rangle=(\Delta+N)|v_0\rangle,\qquad L_n|v_0\rangle=0\quad(n>0).$$

Тогда нетрудно увидеть, что этот вектор ортогонален всем остальным векторам модуля Верма. Векторам других уровней он заведомо ортогонален. Поэтому рассмотрим вектор $|v\rangle$ уровня N. Пусть $|v\rangle=\sum_{\vec n}A_{\vec n}L_{-n_1}\cdots L_{-n_k}|\Delta\rangle$, $|\vec n|=N$. Тогда

$$\langle v|v_0\rangle=\sum_{\vec n}\bar A_{\vec n}\langle\Delta|L_{n_k}\cdots L_{n_1}|v_0\rangle=0.$$

В том числе и норма вектора $|v_0\rangle$ равна нулю. С точки зрения физики это значит, что нуль-вектор отвечает нулю в пространстве состояний. С математической точки зрения нуль-вектор порождает подмодуль (подпредставление) в модуле Верма, так что можно рассмотреть фактор-модуль $M_{c,\Delta}/M_{c,\Delta+N}$, который тоже является представлением алгебры Вирасоро. Далее, неприводимое представление $H_{c,\Delta}$ получается факторизацией модуля Верма по всем подпространствам, порождаемым нуль-векторами.

Найти явно нуль-векторы общего вида не удается, однако их можно искать по вырождению матрицы Шаповалова. Кац доказал, что детерминант Шаповалова уровня N равен

$$A_N\prod_{1\le m,n\le N}(\Delta-\Delta_{mn})^{p(N-mn)},$$

где A_N — некоторая константа, $p(k)$ — число разбиений целого числа k, а Δ_{mn} (*веса Каца*) можно вычислить по формуле

$$\Delta_{mn} = a_{mn}(Q - a_{mn}), \qquad c = 1 + 6Q^2, \qquad Q = b + b^{-1}, \qquad a_{mn} = \frac{1-m}{2}b^{-1} + \frac{1-n}{2}b. \tag{29}$$

На следующей лекции мы дадим некоторое объяснение этой формуле, а пока нужно понять следующее. При значении старшего веса $\Delta = \Delta_{mn}$ $(m, n > 0)$ модуль Верма вырожден содержит нуль-вектор на уровне $N = mn$. В точках общего положения по центральному заряду c имеется единственный нуль-вектор и неприводимое представление определяется как $M_{c,\Delta_{mn}}/M_{c,\Delta_{mn}+mn}$.

Нас будут интересовать модели, содержащие первичные поля $\Phi_{mn}(x)$ с конформными размерностями $\Delta = \bar{\Delta} = \Delta_{mn}$. Такие операторы тоже называют вырожденными. В конформной модели таких операторов может быть несколько, но мы ограничимся моделями содержащими только один оператор каждой размерности Δ_{mn}. Такие модели называют *минимальными*. К сожалению, этот термин использует не «сущностный», а, в каком-то смысле, «случайный» признак. Мы обсудим это подробнее, когда будем рассматривать так называемые рациональные минимальные модели.

Приведем два простых примера нуль-векторов. Случай $m = n = 1$ отвечает весу $\Delta_{11} = 0$. В этом случае нуль-вектор равен $L_{-1}|0\rangle$ и, учитывая (7), приводит к простому тождеству на поле $\Phi_{11}(x)$:

$$\partial\Phi_{11}(x) = \bar{\partial}\Phi_{11}(x) = 0.$$

Это соответствует физической интуиции, что оператор размерности 0 может только влиять на вакуум. В минимальных моделях, естественно, оператор Φ_{11} равен единичному.

Второй случай — это нуль-векторы второго уровня для $\Delta = \Delta_{21}, \Delta_{12}$. Нетрудно проверить, что соответствующий нуль вектор имеет вид $(L_{-1}^2 + b^{\mp 2}L_{-2})|\Delta\rangle$. Все корреляционные функции этого вектора равны нулю. Например,

$$\langle\Phi^{\alpha_4}|\Phi_{\alpha_3}(1,1)\Phi_{\alpha_2}(z,\bar{z})(L_{-1}^2 + b^{-2}L_{-2})|\Phi_{21}\rangle = 0. \tag{30}$$

Протаскивая оператор $(L_{-1}^2 + b^{-2}L_{-2})$ налево и учитывая, что

$$\langle\Phi^{\alpha_4}|\partial\Phi_{\alpha_3}(1,1)\Phi_{\alpha_2}(z,\bar{z})|\Phi_{\alpha_1}\rangle = (\tilde{\Delta} - z\partial)\langle\Phi^{\alpha_4}|\Phi_{\alpha_3}(1,1)\Phi_{\alpha_2}(z,\bar{z})|\Phi_{\alpha_1}\rangle,$$
$$\langle\Phi^{\alpha_4}|\partial^2\Phi_{\alpha_3}(1,1)\Phi_{\alpha_2}(z,\bar{z})|\Phi_{\alpha_1}\rangle = ((\tilde{\Delta} - 1)(\tilde{\Delta} - 2z\partial) + z^2\partial^2)\langle\Phi^{\alpha_4}|\Phi_{\alpha_3}(1,1)\Phi_{\alpha_2}(z,\bar{z})|\Phi_{\alpha_1}\rangle,$$
$$\tilde{\Delta} = \Delta_{\alpha_4} - \Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\alpha_2} - \Delta_{\alpha_3},$$

получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$(2z^2\partial^2 + ((2\tilde{\Delta} - b^{-2})z + b^{-2}z^{-1})\partial + \tilde{\Delta}(\tilde{\Delta} - 1) + b^{-2}(\tilde{\Delta} - \Delta_3))\langle\Phi^{\alpha_4}|\Phi_{\alpha_3}(1,1)\Phi_{\alpha_2}(z,\bar{z})|\Phi_{21}\rangle = 0. \tag{31}$$

Отсюда следует, что конформный блок $F_{21,\alpha_2,\alpha_3}^{\alpha_4}(\beta|z)$ также является решением дифференциального уравнения второго порядка. Дифференциальное уравнение допускает два линейно-независимых решения. Эти два решения легко отождествить с конформными блоками. Действительно, найдем лидирующий член каждого решения вблизи точки $z = 0$. Разумеется, эти члены определяются слагаемыми, содержащими ∂^2, $z^{-1}\partial$ и z^{-2}. Вместо того, чтобы копаться в этих слагаемых, изучим трехточку

$$\langle\Phi_\beta|\Phi_{\alpha_2}(z,\bar{z})|\Phi_{21}\rangle = z^{\Delta' - \Delta - \Delta_{21}}\bar{z}^{\bar{\Delta}' - \bar{\Delta} - \Delta_{21}}C_{\alpha_2,21}^{\beta}.$$

Для краткости (и ясности окончательных формул) мы обозначили

$$\Delta' = \Delta_\beta, \qquad \Delta = \Delta_{\alpha_2}, \qquad \bar{\Delta}' = \bar{\Delta}_\beta, \qquad \bar{\Delta} = \bar{\Delta}_{\alpha_2}.$$

Фактически, множители $z^{\#}$, $\bar{z}^{\#}$ представляют собой трехточечные конформные блоки или же, с точностью до постоянного множителя, первые слагаемые в четырехточечных конформных блоках. Аналогично (30 имеем

$$\begin{aligned}0 = \langle\Phi_\beta|\Phi_{\alpha_2}(z,\bar{z})(L_{-1}^2 + b^{-2}L_{-2})|\Phi_{21}\rangle &= (\partial^2 + b^{-2}\Delta z^{-2} - b^{-2}z^{-1}\partial)\langle\Phi_\beta|\Phi_{\alpha_2}(z,\bar{z})|\Phi_{21}\rangle \\ &= C_{\alpha_2,21}^{\beta}(\partial^2 + b^{-2}\Delta z^{-2} - b^{-2}z^{-1}\partial)z^{\Delta' - \Delta - \Delta_{21}}\bar{z}^{\#} \\ &= ((\Delta' - \Delta - \Delta_{21})(\Delta' - \Delta - \Delta_{21} - 1) + b^{-2}(2\Delta + \Delta' - \Delta_{21}))z^{\Delta' - \Delta - \Delta_{21} - 2}\bar{z}^{\#}\end{aligned}$$

Отсюда следует, что
$$(\Delta' - \Delta - \Delta_{21})(\Delta' - \Delta - \Delta_{21} - 1) + b^{-2}(2\Delta + \Delta' - \Delta_{21}) = 0.$$
Получилось квадратное уравнение, которое нетрудно решить. Ответ удобнее всего записать в параметризации
$$\Delta = a(Q - a). \tag{32}$$
Он выглядит так
$$a'_{\pm} = a \pm a_{21} = a \mp \frac{b^{-1}}{2}. \tag{33}$$
Аналогично, в случае слияния с полем Φ_{12} имеем
$$a'_{\pm} = a \pm a_{12} = a \mp \frac{b}{2}. \tag{34}$$
Это очень важные результат. Отсюда следует, что
$$\mathcal{F}^{\alpha_4}_{21,\alpha_2,\alpha_3}(\beta_{\pm}|z) = z^{\Delta'_{\pm} - \Delta_{\alpha_2} - \Delta_{21}} \left(1 + \sum_{N=1}^{\infty} B_N z^N\right), \qquad \Delta_{\beta_{\pm}} = \Delta'_{\pm} = a'_{\pm}(Q - a'_{\pm}),$$
с некоторыми коэффициентами B_N. Ряд в скобках сходится внутри единичного круга. В точке $z = 1$ соответствующая функция имеет точку ветвления. Конформные блоки, соответствующие двум решениям (33) являются двумя линейно-независимыми решениями дифференциального уравнения (31) с разными асимптотиками при $z \to 0$. Можно определить матрицу монодромии этих решений. Пусть $y_{\pm}(z) = \mathcal{F}^{\alpha_4}_{21,\alpha_2,\alpha_3}(\beta_{\pm}|z)$ и $y = \begin{pmatrix} y_+ \\ y_- \end{pmatrix}$. Тогда *матрица монодромии* M_0 определяется уравнением
$$y(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} z) = M_0 y(z) \tag{35}$$
и имеет диагональный вид
$$M_0 = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\Delta'_+ - \Delta - \Delta_{21})} & \\ & \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\Delta'_- - \Delta - \Delta_{21})} \end{pmatrix}. \tag{36}$$
Аналогично мы можем определить матрицу монодромии M_1 при обходи вокруг точки $z = 1$:
$$y(1 + \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}(z - 1)) = M_1 y(z). \tag{37}$$
Эта матрица уже не будет диагональна и для ее вычисления нужно построить решение уравнения в более или менее явном виде. Именно такое решение (с некоторыми ограничениями на значения размерностей) предоставляет нам представление свободными полями.

Рассмотрим теперь конформные блоки, отвечающие правой части равенства (27): $\mathcal{F}^{\alpha_4}_{21,\alpha_2,\alpha_3}(\beta|1-z)$. Очевидно, это решения того же самого дифференциального уравнения. У нас пока нет правила для слияния нескольких операторов $\Phi_{\alpha_3}(x)$ и Φ_{α_4}, но легко понять, что предел $z \to 1$ означает здесь одновременно слияние операторов Φ_{21} и Φ^{α_4}. Действительно, мы можем написать
$$\mathcal{F}^{\alpha_4}_{21,\alpha_2,\alpha_3}(\tilde\beta_{\pm}|z) = z^{\Delta_{\tilde\beta_{\pm}} - \Delta_{\alpha_2} - \Delta_{\alpha_3}} \left(1 + \sum_{N=1}^{\infty} \tilde B_N z^N\right), \qquad \Delta_{\tilde\beta_{\pm}} = \tilde a'_{\pm}(Q - \tilde a'_{\pm}), \qquad \tilde a'_{\pm} = a_{\alpha_4} \mp \frac{1}{2b}.$$
Если теперь мы примем $\tilde y_{\pm}(z) = \mathcal{F}^{\alpha_4}_{21,\alpha_2,\alpha_3}(\tilde\beta_{\pm}|1 - z)$, новое решение $\tilde y = \begin{pmatrix} \tilde y_+ \\ \tilde y_- \end{pmatrix}$ будет иметь диагональную матрицу монодромии вокруг точки $z = 1$:
$$\tilde M_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\Delta_{\tilde\beta_+} - \Delta_{\alpha_2} - \Delta_{\alpha_3})} & \\ & \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\Delta_{\tilde\beta_-} - \Delta_{\alpha_2} - \Delta_{\alpha_3})} \end{pmatrix}, \tag{38}$$
в то время как матрица $\tilde M_0$ не будет диагональной. Однако, если мы найдем матрицу перехода X,
$$y(z) = X \tilde y(z),$$

то сможем вычислить и матрицы монодромии M_1 и $\tilde{M}_0$. Сами по себе, эти матрицы нам не нужно, но ведь нас интересуют корреляционные функции (24), (26). Если мы посмотрим на левую часть (26), мы немедленно поймем, что диагональный вид матрицы монодромии (36) означает однозначность корреляционной функции как функции z при обходе вокруг точки $z = 0$. Правая же сторона (26) с учетом (38) выражает однозначность корреляционной функции при обходе вокруг точки $z = 1$. Таким образом, выполнение условия кроссинг-симметрии гарантирует однозначность корреляционной функции.

Все рассуждения, которые мы провели для оператора Φ_{21} прямо (за исключением явной записи для нуль-векторов и дифференциальных операторов) обобщаются на произвольные вырожденные операторы Φ_{mn}. Присутствие вырожденного оператора в четырехточечной функции немедленно означает, что как сама корреляционная функция, так и соответствующие конформные блоки являются решениями дифференциального уравнения порядка nm. Конформные блоки представляют собой линейно-независимые решения дифференциального уравнения, а корреляционные функции — их монодромно-инвариантные билинейные комбинации. Коэффициенты в этих комбинациях очень часто фиксируются однозначно или почти однозначно (есть несколько вариантов), что для некоторого класса моделей позволяет однозначно фиксировать структурные константы операторной алгебры.

Имеются также правила, обобщающие правила (33), (34). Они называются *правилами слияния.* Правила такого рода можно условно записать в виде

$$\Phi_\alpha(x)\Phi_\beta(0) \sim \sum_{\gamma\in F^\gamma_{\alpha\beta}} [\Phi_\gamma(0)]. \tag{39}$$

Здесь $[\Phi_\gamma]$ обозначает *конформное семейство*, то есть совокупность всех потомков Φ_γ. Разумеется, на самом деле, имеется в виду линейная комбинация всех операторов семейства с подходящими коэффициентами (структурными функциями). Множество $F^\gamma_{\alpha\beta}$ показывает, какие конформные семейства могут возникать в операторном разложении операторов Φ_α и Φ_β. Если один из операторов, например Φ_β является вырожденным, $\Phi_\beta = \Phi_{mn}$, то в правой части могут возниать операторы только определенных конформных размерностей. Если мы положим

$$\Delta_\alpha = a(Q-a), \qquad \Delta_\gamma = a'(Q-a'),$$

то конформные размерности определяются формулами

$$a' = a + a_{m-2r,n-2s}, \qquad r = 0,1,\ldots,m-1, \qquad s = 0,1,\ldots,n-1.$$

В случае, когда оба оператора вырождены, ограничения становятся еще более жесткими. Пусть $\Delta_\alpha = \Delta_{m_1 n_1}$, $\Delta_\gamma = \Delta_{m_2,n_2}$. Тогда

$$\begin{aligned} m_2 &= m_1 + m - 2 - 2r, \quad r = 0,1,\ldots,\min(m,m_1)-1,\\ n_2 &= n_1 + n - 2 - 2s, \quad\ s = 0,1,\ldots,\min(n,n_1)-1. \end{aligned}$$