Лекция 9
Алгебраический анзатц Бете. Решение уравнений Бете

Вернемся к определению L-оператора:

$$L(u) = R_{0N}(u)\dots R_{02}(u)R_{01}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Рассмотрим матричный элемент $B(u) = L(u)^{+}_{-}$. Этот элемент уменьшает спин на единицу:

$$[S^z, B(u)] = -1. \tag{2}$$

Подействуем этим оператором на псевдовакуум $|\Omega_+\rangle$. Мы получим плоскую волну

$$B(u)|\Omega_+\rangle = \sum_n b^{n-1}(u)c(u)a^{N-n}(u)|n\rangle.$$

Роль импульса здесь играет u определяющее отношение $z = b(u)/a(u)$. Аналогично,

$$B(u_1)B(u_2)|\Omega_+\rangle = \sum_{n_1\neq n_2} b^{n_1-2}(u_1)c(u_1)a^{N-n_1+1}(u_1)b^{n_2-1}(u_2)c(u_2)a^{N-n_2}(u_2)|n_1,n_2\rangle.$$

Мы видим, что состояния вида

$$|u_1,u_2,\dots,u_k\rangle = B(u_1)B(u_2)\dots B(u_k)|\Omega_+\rangle \tag{3}$$

имеют структуру волновых функций Бете с $z_j = b(u_j)/a(u_j)$. Выражение (3) именуется *алгебраическим анзатцем Бете*. Чтобы понять, действительно ли это выражение дает собственные векторы, рассмотрим коммутационные соотношения, следующие из уравнения Янга–Бакстера:

$$R_{12}(u_1-u_2)L_1(u_1)L_2(u_2) = L_2(u_2)L_1(u_1)R_{12}(u_1-u_2).$$

Во-первых, ${}^{++}_{--}$-компонента этого соотношения дает

$$B(u_1)B(u_2) = B(u_2)B(u_1). \tag{4}$$

Это значит, что состояния (3) симметричны по $u_1,\dots,u_k$. Во-вторых, из компонент ${}^{++}_{-+}$ и ${}^{-+}_{--}$ имеем соотношения

$$a(u_1-u_2)B(u_1)A(u_2) = c(u_1-u_2)B(u_2)A(u_1) + b(u_1-u_2)A(u_2)B(u_1), \tag{5}$$
$$a(u_2-u_1)B(u_1)D(u_2) = c(u_2-u_1)B(u_2)D(u_1) + b(u_2-u_1)D(u_2)B(u_1). \tag{6}$$

Из этих соотношений можно вывести тождества

$$\begin{aligned} A(u)|u_1,\dots,u_k\rangle &= \alpha(u;u_1,\dots,u_k)|u_1,\dots,u_k\rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^k \frac{c(u_i-u)}{b(u_i-u)}\alpha(u_i;u_1,\dots,\widehat{u}_i,\dots,u_k)|u,u_1,\dots,\widehat{u}_i,\dots,u_k\rangle, \\ D(u)|u_1,\dots,u_k\rangle &= \delta(u;u_1,\dots,u_k)|u_1,\dots,u_k\rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^k \frac{c(u-u_i)}{b(u-u_i)}\delta(u_i;u_1,\dots,\widehat{u}_i,\dots,u_k)|u,u_1,\dots,\widehat{u}_i,\dots,u_k\rangle, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\alpha(u;u_1,\dots,u_k) = a^N(u)\prod_{i=1}^k \frac{a(u_i-u)}{b(u_i-u)}, \qquad \delta(u;u_1,\dots,u_k) = b^N(u)\prod_{i=1}^k \frac{a(u-u_i)}{b(u-u_i)}. \tag{8}$$

Соотношения (7) доказываются по индукции.

Из соотношений (7) получаем

$$T(u)|u_1,\dots,u_k\rangle = (\alpha(u;u_1,\dots,u_k)+\delta(u;u_1,\dots,u_k))|u_1,\dots,u_k\rangle + \text{плохие члены}.$$

Чтобы вектор $|u_1, \dots, u_k\rangle$ был собственным, сумма плохих членов должна быть равна нулю. В этом случае собственное значение трансфер-матрицы будет равно

$$\Lambda(u; u_1, \dots, u_k) = a^N(u) \prod_{i=1}^{k} \frac{a(u_i - u)}{b(u_i - u)} + b^N(u) \prod_{i=1}^{k} \frac{a(u - u_i)}{b(u - u_i)}. \tag{9}$$

Отметим, что плохие члены, по сути, набегают в точках $n = 1, N$ и условие их сокращения эквивалентна условию периодичности.

Так как $\frac{c(u)}{b(u)} = -\frac{c(-u)}{b(-u)}$, плохие члены сокращаются, если

$$\alpha(u_i; u_1, \dots, \widehat{u_i}, \dots, u_k) = \delta(u_i; u_1, \dots, \widehat{u_i}, \dots, u_k)$$

или

$$\left(\frac{b(u_i)}{a(u_i)}\right)^N = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \frac{a(u_j - u_i) b(u_i - u_j)}{b(u_j - u_i) a(u_i - u_j)}, \tag{10}$$

Это и есть уравнения Бете. Каждому решению уравнений Бете соответствует некоторый собственный вектор трансфер-матрицы (гамильтониана), так что состояния можно нумеровать наборами $\{u_i\}_{i=1}^k$.

Более явно перепишем уравнения Бете в виде

$$\left(\frac{\sin u_i}{\sin(\lambda - u_i)}\right)^N = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \frac{\sin(u_i - u_j + \lambda)}{\sin(u_i - u_j - \lambda)} \qquad \text{при } c < a + b \text{ и т. д. } (|\Delta| < 1), \tag{11}$$

$$\left(\frac{\operatorname{sh} u_i}{\operatorname{sh}(\lambda - u_i)}\right)^N = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \frac{\operatorname{sh}(u_i - u_j + \lambda)}{\operatorname{sh}(u_i - u_j - \lambda)} \qquad \text{при } c > a + b \ (\Delta < -1). \tag{12}$$

Режим $\Delta < -1$ соответствует наличию двух основных конфигураций шестивершинной модели, для которых конфигурации вокруг всех вершин имеют c-тип, и двукратному (в термодинамическом пределе) вырождению основного состояния XXZ-модели. Возбужденные состояния в XXZ-модели отделены от основного щелью. В этом случае говорят об антисегнетоэлектрическом упорядочении шестивершинной модели и антиферромагнитном основном состоянии XXZ-модели. В режиме $|\Delta| < 1$ имеется бесконечно много (на бесконечной решетке) основных конфигураций шестивершинной модели (неупорядоченное критическое состояние) и бесщелевой спектр вблизи основного состояния в XXZ-модели. В обоих случаях основному состоянию отвечают состояния с $S^z = 0$ или $S^z = \pm\frac{1}{2}$ в зависимости от четности n.

Покажем, как найти наибольшее собственное значение $\Lambda_{\max}(u)$ в этой модели в термодинамическом пределе. Сделаем следующие предположения:

1) В основном состоянии плоские волны не содержат ни экспоненциально растущих, ни экспоненциально спадающий членов, так что $|z_i| \equiv |b(u_i)/a(u_i)| = 1$ или $u_i = \lambda/2 + iv_i$ с вещественными v_i.

2) В основном состоянии v_i сгущаются в термодинамическом пределе, образуя непрерывные зоны без дырок и отдельно стоящих значений.

3) В основном состоянии $S^z/N \to 0$.

Для определенности будем рассматривать случай $|\Delta| < 1$.

Уравнения Бете удобно прологорифмировать. Введем обозначения

$$e^{ip(v)} = \frac{\sin(\lambda/2 + iv)}{\sin(\lambda/2 - iv)}, \qquad e^{i\theta(v)} = \frac{\sin(\lambda + iv)}{\sin(\lambda - iv)}.$$

Мы выбираем ветвь логарифма, такую что $p(0) = \theta(0) = 0$. Уравнения Бете записываются в виде

$$e^{iNp(v_i)} = (-)^{k-1} \prod_{j=1}^{k} e^{i\theta(v_i - v_j)}.$$

Прологорифмировав, получим

$$Np(v_i) = 2\pi I_i + \sum_{j=1}^{k} \theta(v_i - v_j),$$

где I_i — целое либо полуцелое в зависимости от четности k. Условие 2) мы можем теперь уточнить:

2') В основном состоянии все I_i образуют набор последовательных целых при нечетных k и полуцелых при четных k чисел.

В этом виде утверждение, по-видимому, верно не только в термодинамическом пределе. При малых k можно также показать, что

2а) Наибольшее собственное значение трансфер-матрицы в секторе с данным S^z достигается при симметричном распределении I_i (и v_i) вокруг нуля.

Найдем интервал, в котором будет изменяться v в непрерывном пределе. Для этого удобнее пользоваться гамильтонианом H_{XXZ}. Как мы уже говорили в прошлой лекции энергия состояния складывается из энергий псевдочастиц $\epsilon(z) = 2\Delta - z - z^{-1} = 2\Delta - 2\cos p(v)$. Наименьшей энергии отвечает значение $p = 0$, то есть $v = 0$. Псевдочастицы должны плотно заполнять область $-p_F \le p(v) \le p_F$, где p_F — импульс Ферми, $\epsilon(e^{\pm i p_F}) = \epsilon_F$. Поскольку функция $p(v)$ нечетна и монотонна, спектральный параметр v должен заметать область от $-v_F$ до v_F, где $p(v_F) = p_F$.

Имеем для основного состояния

$$p(v_{i+1}) - p(v_i) = \frac{2\pi}{N} + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k}(\theta(v_{i+1} - v_j) - \theta(v_i - v_j)).$$

В пределе $N \to \infty$ имеем

$$p'(v) = 2\pi\rho(v) + \int_{-v_F}^{v_F} dv'\, \theta'(v - v')\rho(v') \tag{13}$$

или

$$\rho(v) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin\lambda}{\operatorname{ch} 2v - \cos\lambda} - \int_{-v_F}^{v_F} \frac{dv'}{\pi}\, \frac{\sin 2\lambda}{\operatorname{ch} 2(v - v') - \cos 2\lambda}\,\rho(v'), \tag{13$'$}$$

где $p'(v)$, $\theta'(v)$ — производные от $p(v)$, $\theta(v)$ по v, а $\rho(v) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N(v_{i+1} - v_i)}$ — плотность корней вблизи точки v, которая и будет неизвестной функцией в этом уравнении. Интервал $[-v_F, v_F]$ определяется из условия

$$\int_{-v_F}^{v_F} dv \rho(v) = \frac{k}{N}. \tag{14}$$

Далее надо минимизировать энергию по k/N.

В пределе $N \to \infty$ можно ожидать, что одно из слагаемых в (9) много больше другого, поэтому

$$\log\kappa(u) \equiv \lim_{N\to\infty} \frac{\log\Lambda(u)}{N} = \max\Bigg(\log a(u) + \int_{-v_F}^{v_F} dv\, \rho(v) \log\frac{a(iv - u + \lambda/2)}{b(iv - u + \lambda/2)}, \tag{15}$$

$$\log b(u) + \int_{-v_F}^{v_F} dv\, \rho(v) \log\frac{a(u - iv - \lambda/2)}{b(u - iv - \lambda/2)}\Bigg). \tag{16}$$

Уравнение (13) нетрудно решить методом Фурье при $v_F = \infty$. Положим

$$\rho(v) = \int dk\, \rho_k e^{ikv}, \qquad p'(v) = \int dk\, p_k e^{ikv}, \qquad \theta'(v) = \int dk\, \theta_k e^{ikv}. \tag{17}$$

Тогда

$$\rho_k = \frac{p_k}{2\pi} - \theta_k \rho_k,$$

т. е.

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi}\frac{p_k}{1 + \theta_k}.$$

Нетрудно проверить, что

$$p_k = \frac{\operatorname{sh}\frac{1}{2}(\pi - \lambda)k}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}\pi k}, \qquad \theta_k = \frac{\operatorname{sh}\frac{1}{2}(\pi - 2\lambda)k}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}\pi k}.$$

Отсюда получаем

$$\rho_k = \frac{1}{4\pi \operatorname{ch} \frac{1}{2}\lambda k}. \tag{18}$$

Очевидно

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv\, \rho(v) = 2\pi\rho_0 = \frac{1}{2},$$

а значит $k = N/2$ и $S^z = 0$ (конечно, с точностью до членов порядка 1). Таким образом, это решение соответствует основному состоянию системы.

Учитывая, что

$$\int \frac{dv}{2\pi}\, e^{-ikv} \log\left|\frac{\sin(\lambda - iv + w)}{\sin(iv - w)}\right| = \frac{\operatorname{sh}\frac{1}{2}(\lambda + 2w)k \operatorname{sh}\frac{1}{2}(\pi - \lambda)k}{k \operatorname{sh}\frac{1}{2}\pi k},$$

можно убедится, что оба значения под знаком максимума в (16) совпадают и дают

$$\log\kappa(u) = \log a(u) + \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \frac{\operatorname{sh} uk \operatorname{sh}\frac{\pi-\lambda}{2}k}{2k \operatorname{sh}\frac{\pi}{2}k \operatorname{ch}\frac{\lambda}{2}k} \tag{19}$$

$$= \log b(u) + \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \frac{\operatorname{sh}(\lambda - u)k \operatorname{sh}\frac{\pi-\lambda}{2}k}{2k \operatorname{sh}\frac{\pi}{2}k \operatorname{ch}\frac{\lambda}{2}k}. \tag{20}$$

В случае $\Delta < -1$ синусы заменяются на гиперболические синусы и функции $p'(v)$ и $\theta'(v)$ оказываются периодическими по v с периодом π. Это значит, что интеграл Фурье в (17) заменяется на ряд Фурье. Поэтому окончательная формула для свободной энергии имеет вид ряда

$$\log\kappa(u) = \log a(u) + u + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda m} \operatorname{sh} 2um}{m \operatorname{ch}\lambda m} \tag{21}$$

$$= \log b(u) + \lambda - u + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda m} \operatorname{sh} 2(\lambda - u)m}{m \operatorname{ch}\lambda m}. \tag{22}$$

Задачи

1. Доказать соотношения (7) по индукции по k.

2. Покажите, что анзатц Бете (10) можно получить из формулы для собственных значений (9) и требования аналитичности собственного значения как функции u.

3. Введите переменную t, имеющую смысл $(T - T_c)/T_c$ вблизи каждой из двух критических точек $\Delta = \pm 1$. Покажите, что свободная энергия непрерывна в этих точках и найдите выражения для свободной энергии.

4. Покажите, что вблизи точки $\Delta = -1$ свободная энергия регулярна в антисегнетоэлектрической области и имеет слабую сингулярность в неупорядоченной области:

$$f_{\text{sing}} \sim e^{-c/t^{1/2}}$$

с некоторой константой c.