

**Лекция 4**  
 **$O(N)$ -модель:  $1/N$ -разложение**

Рассмотрим общую  $O(N)$ -модель в пространстве Минковского:

$$S[\mathbf{n}] = \frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n})^2, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (1)$$

Удобно ввести вспомогательное поле  $\omega(x)$  и написать действие в виде

$$S[\mathbf{n}, \omega] = \frac{1}{2g} \int d^2x ((\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \omega(\mathbf{n}^2 - 1)), \quad (2)$$

где вектор  $\mathbf{n}$  теперь пробегает любые значения в  $\mathbb{R}^N$ . Рассмотрим функциональный интеграл

$$Z[J] = \int D\omega D\mathbf{n} e^{iS[\mathbf{n}, \omega] + ig^{-1/2} \int d^2x \mathbf{J}\mathbf{n}}. \quad (3)$$

Интеграл по  $\mathbf{n}$  — гауссов. Возьмем его. Заметим, что

$$iS[\mathbf{n}, \omega] + ig^{-1/2} \int d^2x \mathbf{J}\mathbf{n} = -\frac{1}{2} \left( \frac{n_i}{g^{1/2}}, K(\omega) \delta_{ij} \frac{n_j}{g^{1/2}} \right) + \left( iJ_i, \frac{n_i}{g^{1/2}} \right) + i \int d^2x \frac{\omega}{2g},$$

где

$$K(\omega) = i(\partial_\mu^2 + \omega).$$

Отсюда получаем

$$Z[J] = \int D\omega (\det(\partial_\mu^2 + \omega))^{-N/2} \exp \left( i \int d^2x \frac{\omega}{2g} - \frac{1}{2} \int d^2x d^2x' J_i(x) G(x, x'|\omega) J_i(x') \right),$$

где  $G(x, x'|\omega)$  — решение уравнения

$$i(\partial_\mu^2 + \omega(x))G(x, x'|\omega) = \delta(x - x'). \quad (4)$$

По-другому производящий функционал можно переписать в виде

$$Z[J] = \int D\omega \exp \left( iS_{\text{эфф}}[\omega] - \frac{1}{2} \int d^2x d^2x' J_i(x) G(x, x'|\omega) J_i(x') \right), \quad (5)$$

$$S_{\text{эфф}}[\omega] = i \frac{N}{2} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega) + \int d^2x \frac{\omega}{2g}. \quad (6)$$

Найдем точку перевала этого интеграла при  $N \rightarrow \infty$ . Предположим, что точке перевала отвечает

$$\omega(x) = \text{const} = \omega_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{tr} \log(\partial_\mu^2 + \omega_0) &= V \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\omega_0 - k^2 - i0) \\ &= iV \int_E \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log(\omega_0 + k^2) \\ \frac{iV}{2\pi} \int_0^\Lambda dk k \log(\omega_0 + k^2) &= \frac{iV}{4\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_0 + \Lambda^2} du \log u = \frac{iV}{4\pi} \left[ u \log \frac{u}{e} \right]_{\omega_0}^{\omega_0 + \Lambda^2} \\ &= \frac{iV}{4\pi} \left( (\omega_0 + \Lambda^2) \log \frac{\Lambda^2}{e} - \omega_0 \log \frac{\omega_0}{e} \right) \\ &= \frac{iV}{4\pi} \left( \omega_0 \log \frac{\Lambda^2}{\omega_0} + \Lambda^2 \log \frac{\Lambda^2}{e} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\Lambda$  — параметр ультрафиолетового обрезания. Под логарифмом мы пренебрегли  $\omega_0$  по сравнению с  $\Lambda$ . Находим

$$0 = \frac{dS[\omega_0]}{d\omega_0} = V \left( -\frac{N}{8\pi} \log \frac{\Lambda^2}{\omega_0} + \frac{1}{2g} \right).$$

Отсюда находим

$$\omega_0 = m^2 = \Lambda^2 \exp \left( -\frac{4\pi}{Ng} \right). \quad (8)$$

Мы видим, что в пределе  $\Lambda \rightarrow \infty$  следует устремить к нулю и  $g$ , причем таким образом, чтобы величина  $\omega_0 = m^2$  оставалась конечной. Для бета-функции при больших  $N$  находим

$$\frac{dg}{d \log \Lambda} = \beta(g) = -\frac{N}{2\pi} g^2. \quad (9)$$

Важно то, что в теории возникает параметр  $m$  размерности массы. Мы сейчас увидим, что это действительно масса. В теории имеет место *динамическая генерация массы*. Ни на каких масштабах корреляционные функции не будут спадать степенным образом, и наличие размерного параметра будет заметно в корреляционных функциях на любых масштабах.

Давайте теперь разовьем теорию возмущений по параметру  $1/N$ . Представим  $\omega(x)$  в виде

$$\omega(x) = m^2 + (2/N)^{1/2} \rho(x).$$

и разложим эффективное действие по степеням  $N^{-1/2} \rho(x)$ :

$$\begin{aligned} S_{\text{эфф}}[\omega_0 + (2/N)^{1/2} \rho] &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log \left( 1 + (2/N)^{1/2} \rho (\partial_\mu^2 + m^2)^{-1} \right) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + i \frac{N}{2} \text{tr} \log(1 + i(2/N)^{1/2} \rho G) + \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho \\ &= \text{const} + \left( \frac{1}{(2N)^{1/2} g} \text{tr} \rho - \left( \frac{N}{2} \right)^{1/2} \text{tr} \rho G \right) \\ &\quad - i \frac{N}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n (2/N)^{n/2}}{n} \text{tr}(\rho G)^n. \end{aligned}$$

Скобка в последнем выражении равна нулю по предположению, что  $\omega = \omega_0$  является абсолютным минимумом. Разумеется, это не доказано строго. Формулы (7)–(8) доказывают зануление этой скобки только при постоянной функции  $\rho(x)$ .

Окончательно, имеем

$$S_{\text{эфф}}[\omega_0 + (2/N)^{1/2} \rho] = \text{const} - i \frac{N}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^n (2/N)^{n/2}}{n} \int d^{2n} x \rho(x_1) G(x_1, x_2) \dots \rho(x_n) G(x_n, x_1). \quad (10)$$

Здесь  $G(x_1, x_2) = G(x_1, x_2 | m^2)$ . Разложение начинается с квадратичного члена вида

$$\frac{i}{2} \int d^2 x_1 d^2 x_2 \rho(x_1) G(x_1, x_2) \rho(x_2) G(x_2, x_1).$$

Поэтому пропагатор  $D(x_1, x_2)$  поля  $\rho(x)$  есть оператор, обратный к

$$D^{-1}(x_1, x_2) = G(x_1, x_2) G(x_2, x_1).$$

Теперь ясно, для чего понадобился множитель  $(2/N)^{1/2}$  перед  $\rho$ . Он позволяет избавиться от коэффициента  $2/N$  в пропагаторе  $D(x_1, x_2)$ .

Переходя к импульсному представлению, получим

$$D(k) = \text{-----} \frac{k}{\text{-----}} \text{-----} = - \left( \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{1}{(q^2 - m^2 + i0)((q+k)^2 - m^2 + i0)} \right)^{-1}. \quad (11)$$

Кроме того, оператор  $G(x, x'|\omega)$ , входящий в (5), тоже следует разложить по  $\rho(x)$ :

$$G[m^2 + (2/N)^{1/2}\rho] = \frac{1}{G^{-1}[m^2] + i(2/N)^{1/2}\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \left(\frac{2}{N}\right)^{n/2} G(\rho G)^n$$

$$G(x_1, x_2|m^2 + (2/N)^{1/2}\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \left(\frac{2}{N}\right)^{n/2} \int d^{2n}y G(x_1, y_1)\rho(y_1)G(y_1, y_2)\dots\rho(y_n)G(y_n, x_2).$$

Изобразим  $G(x_1, x_2)$  сплошной линией:

$$G_{ij}(p) = \begin{array}{c} \phantom{p} \\ \text{---} \phantom{p} \text{---} \\ \phantom{p} \end{array} = G(p)\delta_{ij} = \frac{i\delta_{ij}}{p^2 - m^2 + i0}. \quad (12)$$

Если еще ввести вершину

$$\begin{array}{c} \phantom{p} \\ \vdots \\ \text{---} \phantom{p} \text{---} \end{array} = -i \left(\frac{2}{N}\right)^{1/2} \delta_{ij}, \quad (13)$$

Можно сформулировать следующие правила диаграммной техники:

1. Диаграмма состоит из пунктирных линий (11), сплошных линий (12) и вершин (13).
2. Внешними линиями диаграммы могут быть только сплошные линии, отвечающие массивным частицам  $\varphi_i = g^{-1/2}n_i$ .
3. Замкнутые петли сплошных линий должны содержать не менее трех вершин.

Мы видим, что в такой формулировке диаграммная техника вообще не содержит константы связи  $g$ . Порядок диаграммы по  $1/N$  равен  $\frac{1}{2}V - L$ , где  $V$  — число вершин, а  $L$  — число петель из сплошных линий. Из правила 3 следует, что порядок диаграммы всегда положителен.

Связь между константой связи  $g$ , массой  $m$  и параметром обрезания  $\Lambda$  можно уточнять с помощью соотношения

$$\left\langle \sum_{i=1}^N \varphi_i^2(x) \right\rangle = \frac{1}{g}.$$

Например в порядке  $1/N$  можно получить, что

$$m^2 = \Lambda^2 \exp\left(-\frac{4\pi}{(N-2)g}\right). \quad (14)$$

Давайте теперь попробуем вычислить  $S$ -матрицу  $O(N)$ -модели. Разберемся сначала с кинематикой. У нас имеется  $N$  частиц массы  $m$ . Пусть две такие частицы с быстройми  $\theta_1$  и  $\theta_2$  рассеиваются друг на друге, образуя две новые частицы той же массы с быстройми  $\theta'_1$  и  $\theta'_2$ . Тогда

$$\begin{aligned} m \operatorname{ch} \theta_1 + m \operatorname{ch} \theta_2 &= m \operatorname{ch} \theta'_1 + m \operatorname{ch} \theta'_2, \\ m \operatorname{sh} \theta_1 + m \operatorname{sh} \theta_2 &= m \operatorname{sh} \theta'_1 + m \operatorname{sh} \theta'_2. \end{aligned}$$

Это уравнение имеет только два решения:  $\theta'_1 = \theta_1$ ,  $\theta'_2 = \theta_2$  и  $\theta'_1 = \theta_2$ ,  $\theta'_2 = \theta_1$ . Матрицу рассеяния двух частиц в две можно представить в виде

$$S_{ij}^{i'j'}(\theta_1, \theta_2; \theta'_1, \theta'_2) = (2\pi)^2 \delta(p'_1 - p_1) \delta(p'_2 - p_2) S_{ij}^{i'j'}(\theta_1 - \theta_2) + (2\pi)^2 \delta(p'_2 - p_1) \delta(p'_1 - p_2) S_{ij}^{j'i'}(\theta_1 - \theta_2).$$

Чтобы правильно нормировать, нужно преобразовать дельта-функции к стандартному виду дельта-функции по двумерному импульсному пространству. Для, например, первого члена имеем

$$(2\pi)^2 \delta(P' - P) \frac{\operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{ch} \theta_1 \operatorname{ch} \theta_2} S_{ij}^{i'j'}(\theta_1 - \theta_2) = (2\pi)^2 \delta(P' - P) \frac{4m^2 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_2)}{4\varepsilon_1 \varepsilon_2} S_{ij}^{i'j'}(\theta_1 - \theta_2).$$

Следовательно, в стандартных обозначениях

$$M_{ij}^{i'j'}(\theta_1 - \theta_2) = 4m^2 \operatorname{sh}(\theta_1 - \theta_2) S_{ij}^{i'j'}(\theta_1 - \theta_2).$$

Условие совместимости с  $O(N)$ -симметрией дает

$$S_{ij}^{i'j'}(\theta) = \delta_{i'j'} \delta_{ij} S_1(\theta) + \delta_{i'i} \delta_{j'j} S_2(\theta) + \delta_{j'i} \delta_{i'j} S_3(\theta). \quad (15)$$

В порядке  $1/N$  матричные элементы даются следующими диаграммами:

$$\begin{aligned} 4m^2 \operatorname{sh} \theta S_1(\theta) &= \begin{array}{c} p_1 \quad \quad p_1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ p_2 \quad \quad p_2 \end{array}, \\ 4m^2 \operatorname{sh} \theta S_2(\theta) &= \begin{array}{c} p_1 \text{---} p_1 \\ p_2 \text{---} p_2 \end{array} + \begin{array}{c} p_1 \text{---} p_1 \\ | \\ p_2 \text{---} p_2 \end{array}, \\ 4m^2 \operatorname{sh} \theta S_3(\theta) &= \begin{array}{c} p_1 \text{---} p_2 \\ | \\ p_2 \text{---} p_1 \end{array}. \end{aligned}$$

Для вычисления этих диаграмм нам понадобится явная формула для  $D(k)$ . Она имеет вид

$$D^{-1}(k) = \frac{i}{2\pi k^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}} \log \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} + 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} - 1}. \quad (16)$$

Эта громоздкая формула становится вполне элементарной в параметризации

$$k^2 = -4m^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\theta}{2}. \quad (17)$$

Заметим, что угол  $\theta$  в этой параметризации совпадает с  $\theta_1 - \theta_2$  в случае диаграммы для  $S_3$ . Имеем

$$D(k) = 4\pi i m^2 \cdot \frac{\operatorname{sh} \theta}{\theta}. \quad (18)$$

Подставляя эти выражения в диаграммы, получаем

$$\begin{aligned} S_1(\theta) &= -\frac{2\pi i}{N(i\pi - \theta)}, \\ S_2(\theta) &= 1 - \frac{2\pi i}{N \operatorname{sh} \theta}, \\ S_3(\theta) &= -\frac{2\pi i}{N\theta}. \end{aligned} \quad (19)$$

## Литература

- [1] А. В. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov, *Annals Phys.* **120** (1979) 253.
- [2] А. М. Поляков, Калибровочные поля и струны.
- [3] А. М. Цвелик, Квантовая теория поля в теории конденсированного состояния.

## Задачи

1. Получите формулу (16).
2. Модель Гросса–Невё для  $N$ -компонентного майорановского (т. е. вещественного в представлении с чисто мнимыми  $\gamma$ -матрицами) ферми-поля определяется действием

$$S[\psi] = \int d^2x \left( \frac{i}{2} \bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i + \frac{g}{8} (\bar{\psi}_i \psi_i)^2 \right)$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование; в представлении с чисто мнимыми гамма-матрицами  $\bar{\psi} = \psi^T \gamma^0$ ).

Покажите, что эта модель эквивалентна модели со вспомогательным бозонным полем

$$S[\psi, \omega] = \int d^2x \left( \frac{1}{2} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - \omega(x)) \psi_i - \frac{\omega^2(x)}{2g} \right).$$

Покажите, что в модели имеет место динамическая генерация массы

$$\omega_0 = m = \Lambda \exp\left(-\frac{2\pi}{Ng}\right).$$

**3.** Постройте диаграммную технику для  $1/N$ -разложения в модели Гросса–Невё. Найдите  $S$ -матрицу в древесном приближении.