

Лекция 2 Бозонизация модели Тирринга

Рассмотрим *массивную модель Тирринга* в пространстве Минковского:

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x \left(\bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi - \frac{g}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 \right). \quad (1)$$

Здесь $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ — фермионное поле и дираковски сопряженное ему поле, γ^μ — матрицы Дирака, а $\hat{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$. Матрицы Дирака удовлетворяют стандартным соотношениям

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu+} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0.$$

В двумерном случае гамма-матрицы можно записать в виде:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

В модели имеется сохраняющийся ток

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (3)$$

В случае $m = 0$ имеется еще один сохраняющийся ток

$$j_3^\mu = \bar{\psi} \gamma^3 \gamma^\mu \psi = \epsilon^{\mu\nu} j_\nu. \quad (4)$$

В прошлый раз мы рассматривали модель синус-Гордона:

$$S^{SG}[\phi] = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} + \mu \cos \beta \phi \right). \quad (5)$$

В модели имеется топологическое число

$$q = \frac{\beta}{2\pi} (\phi(t, +\infty) - \phi(t, -\infty)), \quad (6)$$

принимаящее целые значения. Его можно записать в виде

$$q = \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_1 \phi(t, x). \quad (7)$$

Это позволяет найти ток, ответственный за топологический заряд:

$$j_{\text{top}}^\mu = -\frac{\beta}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi. \quad (8)$$

В этой лекции мы убедимся, что массивная модель Тирринга и модель синус-Гордона эквивалентны [2,3], причем параметры связаны соотношениями

$$g = \pi(\beta^{-2} - 1), \quad (9)$$

$$\mu \sim m r_0^{\beta^2 - 1}, \quad (10)$$

а тирринговский ток совпадает с топологическим:

$$j^\mu = j_{\text{top}}^\mu. \quad (11)$$

Это исключительно важное соответствие, называемое *бозонизацией*. Уравнение (11) играет ключевую роль в бозонизации.

Перепишем действие модели Тирринга, используя явный вид гамма-матриц:

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x (i\psi_1^+ (\partial_0 + \partial_1)\psi_1 + i\psi_2^+ (\partial_0 - \partial_1)\psi_2 + im(\psi_1^+ \psi_2 - \psi_2^+ \psi_1) - 2g\psi_1^+ \psi_2^+ \psi_2 \psi_1).$$

Подставляя $z = x^1 - x^0$, $\bar{z} = x^1 + x^0$, получаем

$$S^{MT}[\psi, \bar{\psi}] = \int d^2x (2i\psi_1^+ \bar{\partial}\psi_1 - 2i\psi_2^+ \partial\psi_2 - im(\psi_1^+ \psi_2 - \psi_2^+ \psi_1) - 2g\psi_1^+ \psi_2^+ \psi_2 \psi_1).$$

В этих компонентах тирринговский ток имеет вид:

$$j^z = -2\psi_2^+ \psi_2, \quad j^{\bar{z}} = 2\psi_1^+ \psi_1.$$

Рассмотрим случай $m = 0$, который допускает точное решение [1]. Начнем с решения классических уравнений движения

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\psi_1 &= -ig\psi_2^+ \psi_2 \psi_1, \\ \partial\psi_2 &= ig\psi_1^+ \psi_1 \psi_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Из сохранения $j_3^\mu = \epsilon^{\mu\nu} j_\nu$ следует, что ток j^μ можно представить в виде

$$j^\mu = -\frac{\beta}{2\pi} \partial^\mu \tilde{\phi}. \quad (13)$$

Здесь $\tilde{\phi}$ и ϕ связаны между собой, как это описано в предыдущей лекции, и удовлетворяют уравнениям движения

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = \partial_\mu \partial^\mu \tilde{\phi} = 0.$$

Общее решение этих уравнений можно записать в виде

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z}), \\ \tilde{\phi}(x) &= \varphi(z) - \bar{\varphi}(\bar{z}), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\varphi(z)$ и $\bar{\varphi}(\bar{z})$ — произвольные функции только z и \bar{z} соответственно. Коэффициент в (13) произволен. Мы выбрали его так, чтобы формально выполнялось соотношение (11).

Мы видим, что безмассовая модель эквивалентна свободному безмассовому бозону. Из (11) и (13) имеем

$$\frac{\beta}{2\pi} \partial\varphi = \psi_1^+ \psi_1, \quad \frac{\beta}{2\pi} \bar{\partial}\bar{\varphi} = \psi_2^+ \psi_2. \quad (15)$$

Дальнейшее решение этих уравнений вместе с (12) в классическом случае неоднозначно. Проще обстоит дело как раз в квантовом случае. Давайте искать решение уравнений (15) в виде

$$\psi_i(x) = \eta_i \sqrt{\frac{N_i}{2\pi}} e^{i\alpha_i \varphi(z) + i\beta_i \bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad \psi_i^+(x) = \eta_i \sqrt{\frac{N_i}{2\pi}} e^{-i\alpha_i \varphi(z) - i\beta_i \bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad (16)$$

где η_i — алгебраические множители, необходимые, чтобы обеспечить фермионное поведение полей ψ_i . Оказывается, что решения можно найти, если положить

$$\eta_1^2 = \eta_2^2 = i, \quad \eta_1 \eta_2 = -\eta_2 \eta_1. \quad (17)$$

В этом случае $(\eta_1 \eta_2)^2 = 1$. Нетрудно проверить, что предположение $\eta_i^+ = \eta_i$ НЕ согласуется с алгеброй (17). Однако, как мы сейчас увидим, чтобы регуляризованное произведение $\psi_i^+ \psi_i$ было эрмитовым, необходимо, чтобы операторы ψ_i и ψ_i^+ не были бы эрмитово-сопряжены.

Прежде всего, потребуем, чтобы поля $\psi_i(x)$ вели себя как фермионы. Поскольку¹

$$\psi_i(x') \psi_j(x) = \eta_i \eta_j \frac{\sqrt{N_i N_j}}{2\pi} (z' - z)^{\alpha_i \alpha_j} (\bar{z}' - \bar{z})^{\beta_i \beta_j} e^{i\alpha_i \varphi(z') + i\beta_i \bar{\varphi}(\bar{z}') + i\alpha_j \varphi(z) + i\beta_j \bar{\varphi}(\bar{z})}, \quad (18)$$

причем это выражение хорошо продолжается в эвклидову область, легко получить, что

$$\alpha_i^2 - \beta_i^2 \in 2\mathbb{Z} + 1, \quad \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 \in 2\mathbb{Z}. \quad (19)$$

¹Мы всюду исключаем R , так как знаем, что инфракрасное обрезание в конечном итоге никуда не войдет.

Из (18) видно, что произведения вроде $\psi_1^+ \psi_1$ плохо определены. Давайте *определим* эти произведения следующим образом. Рассмотрим произведение, например

$$\psi_1^+(x')\psi_1(x) = i\frac{N_1}{2\pi}(z' - z)^{-\alpha_1^2}(\bar{z}' - \bar{z})^{-\beta_1^2}(1 - i\alpha_1(z' - z)\partial\phi(x) - i\beta_1(\bar{z}' - \bar{z})\bar{\partial}\phi(x) + \dots). \quad (20)$$

Усредним это произведение по окружности $|z' - z|^2 = r_0^2$ и будем считать r_0 малым. Старший член в разложении по r_0 примем за $\psi_1^+(x)\psi_1(x)$. Предположим, что

$$\alpha_1^2 - \beta_1^2 = 1. \quad (21)$$

Тогда первый и третий члены в разложении (20) обратятся в нуль. Старшим ненулевым членом будет второй:

$$iN_1r_0^{-2\beta_1^2}\left(\frac{-i\alpha_1\partial\varphi}{2\pi}\right).$$

Его мы и отождествляем с $\psi_1^+\psi_1$. Мы видим, что если бы мы потребовали буквальной эрмитовой сопряженности ψ и ψ^+ , множитель i в $-i\alpha_1\varphi(z)$ испортил бы нам эрмитовость оператора $\psi_1^+\psi_1$.

Сравнивая с (15), получаем

$$\beta = r_0^{-2\beta_1^2}N_1\alpha_1. \quad (22)$$

Аналогично, полагая

$$\alpha_2^2 - \beta_2^2 = -1, \quad (23)$$

получим

$$\beta = r_0^{-2\alpha_2^2}N_2\beta_2. \quad (24)$$

Теперь рассмотрим уравнения движения (12). Подставляя (15) и (16), получим

$$\begin{aligned} i\beta_1\bar{\partial}\bar{\varphi}e^{i\alpha_1\varphi+i\beta_1\bar{\varphi}} &= -ig\frac{\beta}{2\pi}\bar{\partial}\bar{\varphi}e^{i\alpha_1\varphi+i\beta_1\bar{\varphi}}, \\ i\alpha_2\partial\varphi e^{i\alpha_2\varphi+i\beta_2\bar{\varphi}} &= ig\frac{\beta}{2\pi}\partial\varphi e^{i\alpha_2\varphi+i\beta_2\bar{\varphi}}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\alpha_2 = -\beta_1 = \frac{g\beta}{2\pi} \quad (25)$$

Чтобы зафиксировать коэффициенты α_i , β_i , нужно узнать еще нормировочные множители N_i . Вместо того, чтобы аккуратно извлекать сингулярные члены в антикоммутаторах, давайте просто зафиксируем их так, чтобы член $-m\bar{\psi}\psi = im(\psi_1^+\psi_2 - \psi_2^+\psi_1)$ был бы пропорционален $\cos\beta\phi$.

Рассмотрим разложение

$$\psi_2^+(x')\psi_1(x) = -\eta_1\eta_2\frac{\sqrt{N_1N_2}}{2\pi}(z' - z)^{-\alpha_1\alpha_2}(\bar{z}' - \bar{z})^{-\beta_1\beta_2}\left(e^{i(\alpha_1-\alpha_2)\varphi(z)+i(\beta_1-\beta_2)\bar{\varphi}(\bar{z})} + \dots\right).$$

Первый член выживает при усреднении по углам, если

$$\alpha_1\alpha_2 = \beta_1\beta_2, \quad (26)$$

что согласуется с (21–25) и дает, кроме того

$$\alpha_1 = -\beta_2 \quad (27)$$

Если отождествить $-i\psi_2^+\psi_1$ с $e^{i\beta\phi}$, то мы получим

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \beta, \quad (28)$$

$$\beta_1 - \beta_2 = \beta. \quad (29)$$

Из (21), (25), (27), (28) легко получить

$$\begin{aligned} \alpha_1 = -\beta_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta} + \beta\right), \\ \alpha_2 = -\beta_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta} - \beta\right). \end{aligned} \quad (30)$$

Подставляя ответ в (25), получаем (9).

Из (22), (24) находим

$$N_1 = -N_2 = -r_0^{\frac{\beta^2}{2} + \frac{1}{2\beta^2} - 1} \frac{2\beta^2}{\beta^2 + 1}, \quad (31)$$

Кроме того, можно принять, что

$$\eta_2 \eta_1 |0\rangle = |0\rangle$$

всюду в $\psi_1^+ \psi_2 - \psi_2^+ \psi_1$. Если считать, что в теории возмущений этот оператор всегда стоит справа от всех других, то найдем

$$i(\psi_1^+ \psi_2 - \psi_2^+ \psi_1) = \frac{2}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} r_0^{\beta^2 - 1} \cos \beta \phi, \quad (32)$$

откуда находим (10).

Строго говоря, пока мы нашли только точное решение для безмассовой модели Тирринга. Однако из наших рассуждений следует, что теории возмущений по члену $m\bar{\psi}\psi$ для модели Тирринга и теория возмущений по $\cos \beta \phi$ для модели синус-Гордона совпадают, что дает сильное основание в пользу совпадения теорий. Отметим, что константа связи g в модели Тирринга не перенормируется, в то время как «масса» m не является физической величиной и существенно перенормируется. Это связано с тем, что массовый член $\psi_1^+ \psi_2 - \psi_2^+ \psi_1$ имеет масштабную размерность β^2 из-за переопределения произведения полей. Измерима константа μ модели синус-Гордон, причем

$$\mu \sim m_{\text{phys}}^{2-\beta^2}, \quad m \sim m_{\text{phys}} (m_{\text{phys}} r_0)^{1-\beta^2} = m_{\text{phys}} (m_{\text{phys}} r_0)^{\frac{g/\pi}{1+g/\pi}}, \quad (33)$$

где m_{phys} — масса физических возбуждений (например, тирринговских фермионов) в теории. Коэффициент пропорциональности между параметром μ и $m_{\text{phys}}^{2-\beta^2}$ известен точно [4].

Остается еще один вопрос: чему соответствуют тирринговские фермионы в модели синус-Гордона? Из равенства между топологическим и фермионным токами можно заключить, что они соответствуют кинкам — нетривиальным возбуждениям с топологическими числами $q = \pm 1$.

Литература

- [1] W. E. Thirring, *Annals Phys.* **3** (1958) 91
- [2] S. Coleman, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 2088
- [3] S. Mandelstam, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 3026
- [4] A. I. Zamolodchikov, *Int. J. Mod. Phys.* **A10** (1995) 1125

Задачи

1. Докажите, что в безмассовой модели Тирринга ток (4) сохраняется.
2. Выведите (18).
3. Покажите, что классическая теория синус-Гордона имеет решения

$$\phi(t, x) = \pm \frac{4}{\beta} \operatorname{arctg} \exp \frac{m(x - vt - x_0)}{\sqrt{1 - v^2}}$$

при $m^2 = 4\pi\mu\beta^2$, при $|v| < 1$ и произвольном x_0 . Найти топологические заряды этих решений.

4. Повторите вывод для случая свободного фермиона ($g = 0$). Проверьте, что в этом случае $m_{\text{phys}} = m = \pi\mu$.

5. В теории свободного бозонного поля показать, что тензор энергии-импульса имеет только две ненулевые компоненты:

$$T_{zz} = -\frac{T(z)}{2\pi} = \frac{(\partial\phi)^2}{4\pi}, \quad T_{\bar{z}\bar{z}} = -\frac{\bar{T}(z)}{2\pi} = \frac{(\bar{\partial}\phi)^2}{4\pi}.$$

В квантовом случае произведения нужно заменить на нормальные произведения $:\dots:$, определенные следующим образом:

$$\varphi_1 \varphi_2 = :\varphi_1 \varphi_2: + \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle, \quad :\varphi_1 \dots \varphi_n : \varphi_{n+1} = :\varphi_1 \dots \varphi_n \varphi_{n+1}: + \sum_{i=1}^n :\varphi_1 \dots \widehat{\varphi}_i \dots \varphi_n: \langle \varphi_i \varphi_{n+1} \rangle$$

(шляпка означает опущенный множитель).

Покажите, что компоненты тензора энергии-импульса имеют следующее операторное разложение

$$T(z')T(z) = \frac{1/2}{(z' - z)^4} + \frac{2T(z)}{(z' - z)^2} + \frac{\partial T(z)}{z' - z} + O(1).$$

Покажите, что

$$T(z')V_\alpha(z) = \frac{\Delta_\alpha V_\alpha(z)}{(z' - z)^2} + \frac{\partial V_\alpha(z)}{z' - z} + O(1), \quad V_\alpha(z) = e^{i\alpha\varphi(z)} = :e^{i\alpha\varphi(z)}:,$$

причем $\Delta_\alpha = \alpha^2/2$ — масштабная размерность поля $V_\alpha(z)$.

6. Покажите, что в модели Тирринга, в согласии с (33), в однопетлевом приближении масса перенормируется следующим образом

$$m_{\text{phys}} = m \left(1 + \frac{g}{\pi} \log \frac{\Lambda}{m} \right),$$

где Λ — параметр обрезания по импульсам.

При выводе диаграммной техники удобно пользоваться представлением для действия модели Тирринга со вспомогательным полем:

$$S[\psi, \bar{\psi}, A^\mu] = \int d^D x \left(\bar{\psi}(i\hat{\partial} - \hat{A} - m)\psi + \frac{1}{2g} A^\mu A_\mu \right).$$