Лекция 1
$O(2)$-модель и переход Костерлица–Таулеса

Здесь мы часто будем рассматривать модели в двумерном пространстве-времени с действием

$$S[\boldsymbol{n}] = \frac{1}{2g}\int d^2x\,(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2, \qquad \boldsymbol{n}^2 \equiv \sum_{i=1}^{N} n_i^2 = 1, \tag{1}$$

которые называются моделями $\boldsymbol{n}$-поля или $O(N)$-моделями. Эти модели обладают явной $O(N)$-симметрией, соответствующей вращениям сферы. Они принадлежат широкому классу сигма-моделей, то есть моделей, у которых поля лежат на многообразиях.

Сейчас мы рассмотрим простейшую модель из этой серии — $O(2)$-модель. Она элементарно линеаризуется. Положим

$$n_1 = \cos\varphi, \qquad n_2 = \sin\varphi.$$

Тогда

$$S[\varphi] = \frac{1}{2g}\int d^2x\,(\partial_\mu\varphi)^2, \tag{2}$$

$$\varphi(x) \sim \varphi(x) + 2\pi. \tag{3}$$

Последняя строчка означает, что мы считаем значения поля φ и $\varphi + 2\pi$ эквивалентными.

Казалось бы, мы имеем безмассовое поле с корреляционными функциями, спадающими степенным образом:

$$\langle e^{im\varphi(x)} e^{in\varphi(y)}\rangle \sim \left(-(x-y)^2\right)^{\frac{g}{4\pi}mn}, \qquad m, n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

На самом деле это совсем не так и результат существенно зависит от значения константы g. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим классические решения уравнений поля

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{5}$$

в эвклидовом пространстве. Рассмотрим набор решений

$$\varphi_{\vec{q}\vec{x}}(x) = \sum_{a=1}^{n} q_a \operatorname{Im}\log(z - z_a) = \sum_{a=1}^{n} \frac{q_a}{2i}\log\frac{z - z_a}{\bar z - \bar z_a}, \qquad q_a \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

где

$$z = x^1 + ix^2 = x^1 - x^0,$$
$$\bar z = x^1 - ix^2 = x^1 + x^0.$$

Эти решения, хотя и имеют сингулярности (неопределенные значения) в точках $z = z_a$, очень важны. Они представляют собой решения с n вихрями в точках z_a с завихренностями q_a. В простейшем случае $n = 1$ решение в радиальных координатах $z - z_1 = re^{i\theta}$ имеет вид

$$\varphi_{q_1x_1}(x) = q_1\theta.$$

Важно отметить, что решения (6) удовлетворяют уравнению (5) даже в точках $x = x_a$. Действительно,

$$\partial_\mu\partial^\mu \frac{1}{2i}\log\frac{z}{\bar z} = \partial_\mu\partial^\mu \operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1} = -\epsilon_{\mu\nu}\partial_\mu\frac{x^\nu}{r^2} = \epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\log\frac{1}{r} = 0.$$

Более того, для любой гладкой и достаточно быстро спадающей функции $\varphi(x)$ мы имеем

$$\int d^2x\,\varphi(x)\partial_\mu\partial^\mu\frac{1}{2i}\log\frac{z}{\bar z} = \varphi(0)\int d^2x\,\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\log\frac{1}{r} = 0.$$

Вклады, пропорциональные производным от $\varphi(x)$ в точке $x = 0$ не дают вклада либо по соображениям симметрии, либо по соображениям конечности в нуле. Отсюда немедленно получаем

$$\int d^2x\,\partial^\mu\varphi\,\partial_\mu\varphi_{\vec{q}\vec{x}} = 0. \tag{7}$$

Вычислим значение действия на вихревых решениях (6):

$$
\begin{aligned}
S[\varphi_{\vec{q}\vec{x}}] &= \frac{2}{g}\int d^2x\,\partial\varphi_{\vec{q}\vec{x}}\,\bar\partial\varphi_{\vec{q}\vec{x}} \\
&= \frac{1}{2g}\int d^2x\sum_{a,b}\frac{q_aq_b}{(z-z_a)(\bar z-\bar z_b)} \\
&= \frac{1}{2g}\left(\sum_a q_a^2\int\frac{d^2x}{|z-z_a|^2}+\sum_{a<b}q_aq_b\int d^2x\,\frac{(z-z_a)(\bar z-\bar z_b)+(\bar z-\bar z_a)(z-z_b)}{|z-z_a|^2|z-z_b|^2}.\right)
\end{aligned}
$$

Первый интеграл берется просто, но расходится и на больших, и на малых масштабах:

$$
\int\frac{d^2x}{|z-z_a|^2}\simeq 2\pi\int_{r_0}^{R}\frac{dr}{r}=2\pi\log\frac{R}{r_0},
$$

где R и r_0 — параметры инфракрасного и ультрафиолетового обрезания соответственно. Второй интеграл расходится только на больших масштабах. Чтобы его взять, удобно считать, что $x_a = y_a = 0$, $x_b = X$, $y_b = 0$ и применить трюк Фейнмана. Имеем

$$
\begin{aligned}
&\int d^2x\,\frac{(z-z_a)(\bar z-\bar z_b)+(\bar z-\bar z_a)(z-z_b)}{|z-z_a|^2|z-z_b|^2} \\
&\quad= 2\int d^2x\,\frac{x(x-X)+y^2}{(x^2+y^2)((x-X)^2+y^2)} = 2\int_0^1 dt\int d^2x\,\frac{x(x-X)+y^2}{(x^2+y^2+t(X^2-2xX))^2} \\
&\quad= |x\to x+tX| = 2\int_0^1 dt\int d^2x\,\frac{x^2+y^2+(2t-1)xX-t(1-t)X^2}{(x^2+y^2+t(1-t)X^2)^2} \\
&\quad\simeq 4\pi\int_0^1 dt\int_0^R dr\,\frac{r(r^2-t(1-t)X^2)}{(r^2+t(1-t)X^2)^2} \\
&\quad\simeq 2\pi\int_0^1 dt\int_0^{R^2}\frac{d\xi}{\xi+t(1-t)X^2}-4\pi\int_0^1 dt\int_0^\infty d\xi\,\frac{t(1-t)X^2}{(\xi+t(1-t)X^2)^2} \\
&\quad= 2\pi\int_0^1 dt\log\frac{R^2}{t(1-t)X^2}-4\pi = 2\pi\log\frac{R^2}{|z_a-z_b|^2}-4\pi\int_0^1 dt\,\log t-4\pi = 2\pi\log\frac{R^2}{|z_a-z_b|^2}
\end{aligned}
$$

Подставляя эти формулы в интеграл для действия, получим

$$
\begin{aligned}
S[\varphi_{\vec{q}\vec{x}}] &= \frac{1}{2g}\left(\pi\sum_a q_a^2\log\frac{R^2}{r_0^2}+2\pi\sum_{a<b}q_aq_b\log\frac{R^2}{|z_a-z_b|^2}\right) \\
&= \frac{\pi}{2g}\left(\sum_a q_a\right)^2\log R^2-\frac{\pi}{2g}\sum_a q_a^2\log r_0^2+\frac{1}{2g}\sum_{a<b}q_aq_b\,2\pi\log\frac{1}{|z_a-z_b|^2}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Первый член стремится к бесконечности, когда размер системы велик, если выражение в скобках не равно нулю. Это значит, что в большой системе должно выполняться условие нейтральности

$$
\sum_a q_a = 0. \tag{9}
$$

Второе слагаемое в (8) ультрафиолетово расходится. Если мы регуляризуем теорию каким-либо естественным способом, например рассмотрим ее как предел теории вида

$$
S[\phi]=\int d^2x\,\left(|\partial_\mu\phi|^2-\frac{\lambda}{4}(|\phi|^2-\phi_0^2)^2\right),
$$

эта величина будет конечной и будет зависеть от структуры кора вихрей. Ниже мы увидим, что значение r_0 не влияет существенно на результат.

Давайте теперь попробуем написать (эвклидов) функциональный интеграл в виде

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^{-2n}}{n!} \sum_{\substack{q_1,\dots,q_n \\ q_1+\dots+q_n=0}} \int d^2x_1 \dots d^2x_n \int D\varphi\, e^{-S[\varphi+\varphi_{\vec{q}\vec{x}}]-(J,\varphi+\varphi_{\vec{q}\vec{x}})}, \tag{10}$$

где интеграл берется теперь по регулярным полям φ без всякого отождествления. Множитель $1/n!$ происходит от того, что решение (8) не меняется при перестановках $z_a \leftrightarrow z_b$, $q_a \leftrightarrow q_b$. Таким образом, суммирование $\sum_{q_1,\dots,q_n} \int d^2x_1 \dots d^2x_n$ учитывает одни и те же конфигурации $n!$ раз. Множитель r_0^{-2n} добавлен для того, чтобы сделать интеграл безразмерным. Можно себе представить, что вихри могут занимать не любые позиции, а располагаются в ячейках размера $\sim r_0$.

Вычислим действие на фоне многовихревого решения:

$$S[\varphi + \varphi_{\vec{q}\vec{x}}] = S[\varphi_{\vec{q}\vec{x}}] + S[\varphi] + \frac{1}{g} \int d^2x\, \partial^\mu \varphi\, \partial_\mu \varphi_{\vec{q}\vec{x}}.$$

Первый член дается выражением (8). Интеграл в последнем члене равен нулю в силу (7). Отсюда

$$Z[J] = Z_0[J] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{q_1,\dots,q_n \\ q_1+\dots+q_n=0}} r_0^{\frac{\pi}{g}\sum q_a^2 - 2n} \int d^2x_1 \dots d^2x_n \prod_{a<b} |z_a - z_b|^{2\frac{\pi}{g} q_a q_b}\, e^{-(J,\varphi_{\vec{q}\vec{x}})}, \tag{11}$$

$$Z_0[J] = \int D\varphi\, e^{-S[\varphi]-(J,\varphi)}. \tag{12}$$

Из отождествления (3) следует, что мы можем рассматривать только источники J вида

$$J_{\vec{J}\vec{y}}(x) = -i \sum_{j=1}^{k} J_j \delta(x - y_j), \qquad J_i \in \mathbb{Z}. \tag{13}$$

Тогда

$$\begin{aligned} Z[J_{\vec{J}\vec{y}}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{q_1,\dots,q_n \\ q_1+\dots+q_n=0}} r_0^{\frac{\pi}{g}\sum_a q_a^2 - \frac{g}{4\pi}\sum_j J_j^2 - 2n} \int d^2x_1 \dots d^2x_n \prod_{a<b} |z_a - z_b|^{\frac{2\pi}{g} q_a q_b} \\ \times \prod_{a,j} \left(\frac{w_j - z_a}{\bar{w}_j - \bar{z}_a} \right)^{q_a J_j/2} \prod_{j<j'} |w_j - w_{j'}|^{\frac{g}{2\pi} J_j J_{j'}}, \end{aligned} \tag{14}$$

где $w_j = y_j^1 + i y_j^2$.

Мы получили нечто вроде статистической суммы плазмы, частицы которой могут иметь любые заряды (причем энергия заряженного состояния пропорциональна квадрату заряда). Источник частиц φ сложно связан с частицами плазмы, однако, в принципе, можно ожидать, что при малых константах связи g («низкие температуры») плазма рекомбинирует и корреляционные функции остаются степенными, в то время как при больших g («высокой температуре») имеется дебаевское экранирование, корреляционные функции спадают экспоненциально и теория массивна. Такой переход по константе связи называется *переходом (Березинского–)Костерлица–Таулеса*.

Естественно, что мы не можем просуммировать весь ряд по теории возмущений. Тем не менее, можно точно определить точку перехода Костерлица–Таулеса. Действительно, плазма не образуется, когда вихри начинают удерживаться в конечном объеме, то есть все интегралы, кроме одного, начинают инфракрасно сходиться при больших n. Кроме того, из-за электронейтральности

$$\sum_{a<b} q_a q_b = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} q_a q_b = \frac{1}{2} \left(\sum_a q_a \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_a q_a^2 = -\frac{1}{2} \sum_a q_a^2 \leq -\frac{n}{2}$$

Отсюда находим, что все интегралы сходятся при

$$2\frac{\pi}{g} \left(-\frac{n}{2} \right) + 2(n-1) < 0.$$

При больших n получаем, что безмассовой фазе отвечают $g < g_{\mathrm{KT}}$, причем

$$g_{\mathrm{KT}} = \frac{\pi}{2}. \tag{15}$$

При $g > g_{\mathrm{KT}}$ вихри не удерживаются и система ведет себя как плазма с конечной корреляционной длиной. Следует отметить, что ответ не зависит от параметра ультрафиолетового обрезания r_0, так что фазовый переход имеет место при сколь угодно малом коре вихря. Заметим, что условие (15) как раз является условием, при котором исчезает размерный множитель $r_0^{\frac{\pi}{g}\sum q_a^2 - 2n}$ для системы простых вихрей $q = \pm 1$. Поскольку в теории нет никаких размерных параметров, кроме r_0, корреляционная длина пропорциональна r_0, и, таким образом, даже у "идеальной" $O(2)$-модели нет никаких шансов избежать фазового перехода. Качественно это можно объяснить тем, что малый статистический вес вихревых состояний с лихвой перекрывается большим объемом фазового пространства.

Выражение (14) можно переписать по-другому, введя новое поле $\phi(x)$. Обратим внимание, что

$$\nabla^2 \frac{1}{4\pi} \log |x|^2 = \delta(x). \tag{16}$$

и потому $\log \frac{R^2}{|x|^2}$ представляет собой пропагатор свободного безмассового бозонного поля:

$$S_0[\phi] = \frac{1}{8\pi} \int d^2x (\partial_\mu \phi)^2. \tag{17}$$

Поскольку уравнения движения в этой модели имеют вид

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0,$$

можно ввести дуальное поле $\tilde{\phi}$ условием

$$\partial_\mu \tilde{\phi} = -\epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi \tag{18}$$

или

$$\partial \tilde{\phi} = \partial \phi, \qquad \bar{\partial} \tilde{\phi} = -\bar{\partial} \phi. \tag{19}$$

Хотя эти формулы имеют буквальный смысл лишь на уравнениях движения, легко показать, что и на корреляционных функциях эти равенства не лишены смысла. Действительно, введем поля $\phi_R(z)$ и $\phi_L(\bar{z})$ уравнениями

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_R(z) + \phi_L(\bar{z}), \\ \tilde{\phi}(x) &= \phi_R(z) - \phi_L(\bar{z}). \end{aligned} \tag{20}$$

Тогда корреляционные функции

$$\langle \phi_R(z) \phi_R(z') \rangle_0 = \log \frac{R}{z - z'}, \qquad \langle \phi_L(\bar{z}) \phi_L(\bar{z}') \rangle_0 = \log \frac{R}{\bar{z} - \bar{z}'}, \qquad \langle \phi_R(z) \phi_L(\bar{z}') \rangle_0 = 0 \tag{21}$$

согласованы с теорией.

Далее нам понадобятся корреляционные функции экспоненциальных операторов. Поскольку эти корреляционные функции содержат бесконечные множители, мы попросту исключим их, переопределив экспоненциальные операторы:

$$e^{i\alpha\phi_{R,L}} \to r_0^{\alpha^2/2} e^{i\alpha\phi_{R,L}}, \qquad e^{i\alpha\phi} \to r_0^{\alpha^2} e^{i\alpha\phi}, \qquad e^{\beta\tilde{\phi}} \to r_0^{-\beta^2} e^{\beta\tilde{\phi}}. \tag{22}$$

Тогда экспоненциальные операторы перестают быть безразмерными и приобретают размерность $d = \alpha^2/2$, α^2 и $-\beta^2$ соответственно. Эта размерность совпадает с *масштабной размерностью* этих операторов. По определению, оператор O обладает масштабной размерностью d_O, если его корреляционные функции инвариантны по отношению к заменам

$$O(x) \to s^{d_O} O(sx)$$

во всех операторах.

Корреляционные функции экспонент в такой модели равны

$$
\begin{aligned}
\langle e^{i\alpha_1\phi_R(z_1)}\dots e^{i\alpha_n\phi_R(z_n)}\rangle_0 &= R^{-\frac{1}{2}\left(\sum_a \alpha_a\right)^2}\prod_{a<b}(z_a-z_b)^{\alpha_a\alpha_b},\\
\langle e^{i\alpha_1\phi_L(\bar z_1)}\dots e^{i\alpha_n\phi_L(\bar z_n)}\rangle_0 &= R^{-\frac{1}{2}\left(\sum_a \alpha_a\right)^2}\prod_{a<b}(\bar z_a-\bar z_b)^{\alpha_a\alpha_b}.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Отсюда следует, что

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \prod_{j=1}^{k} e^{i\beta_j\tilde\phi(y_j)}\prod_{a=1}^{n}e^{i\alpha_a\phi(x_a)}\right\rangle_0\\
&\qquad=\prod_{a<b}|z_a-z_b|^{2\alpha_a\alpha_b}\prod_{j<j'}|w_j-w_{j'}|^{2\beta_a\beta_b}\prod_{a,j}\left(\frac{w_j-z_a}{\bar w_j-\bar z_a}\right)^{\alpha_a\beta_j}\times\begin{cases}1, & \sum\alpha_a=0,\\ 0, & \text{в пр. сл.}\end{cases}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Это выражение в точности совпадает с подынтегральным выражением в (14) при

$$
\begin{aligned}
\alpha_a &= \sqrt{\frac{\pi}{g}}\,q_a,\\
\beta_j &= \sqrt{\frac{g}{4\pi}}\,J_j,
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Отсюда получаем

$$
Z[J_{\vec J\vec y}]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{q_1,\dots,q_n\\ q_1+\dots+q_n=0}} r_0^{\frac{\pi}{g}\sum q_a^2+\frac{g}{4\pi}\sum J_j^2-2n}\int d^2x_1\dots d^2x_n\left\langle\prod_{j=1}^{k}e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}}\,J_j\tilde\phi(y_j)}\prod_{a=1}^{n}e^{i\sqrt{\frac{\pi}{g}}\,q_a\phi(x_a)}\right\rangle_0.
\tag{26}
$$

Заметим, что выражение под знаком интеграла замечательным образом симметрично относительно замен

$$
g\leftrightarrow(2\pi)^2g^{-1},\qquad k\leftrightarrow n,\qquad q_a\leftrightarrow J_j,\qquad \phi(x)\leftrightarrow\tilde\phi(x).
$$

Более того, лагранжиан свободного поля пишется одинаково через поля ϕ и $\tilde\phi$. Поэтому мы можем отождествить

$$
\varphi(x)=\sqrt{\frac{g}{4\pi}}\tilde\phi(x).
\tag{27}
$$

Сделаем важное приближение, не меняющее свойств фазового перехода. Будем пренебрегать вихрями с $|q|>1$, поскольку их вклад падает с уменьшением r_0 быстрее вклада $|q|$ штук вихрей заряда 1. Тогда, исключив несущественный множитель $r_0^{\frac{g}{4\pi}\sum J_j^2}$, производящий функционал можно переписать в виде

$$
\begin{aligned}
Z[J_{\vec J\vec y}]&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_0^{2n(\frac{\pi}{g}-2)}}{(2n)!}\binom{2n}{n}\int d^2x_1\dots d^2x_{2n}\left\langle\prod_{j=1}^{k}e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}}\,J_j\tilde\phi(y_j)}\prod_{a=1}^{n}e^{i\sqrt{\frac{\pi}{g}}\phi(x_a)}\prod_{a=n+1}^{2n}e^{-i\sqrt{\frac{\pi}{g}}\phi(x_a)}\right\rangle_0\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_0^{2n(\frac{\pi}{g}-2)}}{(2n)!}\int d^2x_1\dots d^2x_{2n}\left\langle\prod_{j=1}^{k}e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}}\,J_j\tilde\phi(y_j)}\prod_{a=1}^{2n}\left(e^{i\sqrt{\frac{\pi}{g}}\phi(x_a)}+e^{-i\sqrt{\frac{\pi}{g}}\phi(x_a)}\right)\right\rangle_0\\
&=\left\langle\prod_{j=1}^{k}e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}}\,J_j\tilde\phi(y_j)}\exp\left(2r_0^{\frac{\pi}{g}-2}\int d^2x\,\cos\sqrt{\frac{\pi}{g}}\phi(x)\right)\right\rangle_0\\
&=\int D\phi\,e^{-S_{\mathrm{SG}}[\phi]}\prod_{j=1}^{k}e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}}\,J_j\tilde\phi(y_j)},
\end{aligned}
\tag{28}
$$

где

$$S_{\mathrm{SG}}[\phi] = \int d^2x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} - \mu \cos\beta\phi \right) \tag{29}$$

— действие для модели синус-Гордона с параметрами

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi}{g}}, \qquad \mu = 2r_0^{\frac{\pi}{g}-2}. \tag{30}$$

Более подробно мы изучим эту модель в следующий раз, а пока введем несколько важных понятий. Будем рассматривать модель синус-Гордона как возмущение свободного безмассового бозона. Тогда масштабная размерность оператора возмущения будет равна

$$d_{\mathrm{pert}} = \beta^2.$$

Когда $d_{\mathrm{pert}} < 2$ возмущение называется *релевантным*. Оно существенно меняет поведение системы на больших масштабах и не меняет на малых. Когда $d_{\mathrm{pert}} > 2$ возмущение называется *иррелевантным* и не меняет качественно инфракрасного поведения. Случай $d_{\mathrm{pert}} = 2$ называется *маргинальным*. В случае модели синус-Гордона именно он соответствует точке перехода Костерлица–Таулеса.

Пояснение

Это пояснение касается определения экспоненциальных полей в теории свободного скалярного поля. Для простоты мы ограничимся функционалами от поля $\varphi(z) \equiv \varphi_R(z)$. Прежде всего, введем нормальное произведение полей $:\ldots:$ с помощью рекурсионного соотношения

$$:\varphi(z_1)\ldots\varphi(z_n):\varphi(z) = \;:\varphi(z_1)\ldots\varphi(z_n)\varphi(z): + \sum_{i=1}^{n} :\varphi(z_1)\overset{\widehat{i}}{\ldots}\varphi(z_n):\langle\varphi(z_i)\varphi(z)\rangle$$

с начальным условии

$$:1: = 1.$$

Здесь индекс $\hat{i}$ над многоточием означает, что из нормального произведения исключен i-тый множитель. Отсюда нетрудно вывести, что

$$:\varphi(z_1)\ldots\varphi(z_m): :\varphi(w_1)\ldots\varphi(w_n): = \\ = \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_k\le m \\ 1\le j_1,\ldots,j_k\le n}} :\varphi(z_1)\overset{\widehat{i_1}\ldots\widehat{i_k}}{\ldots}\varphi(z_m)\varphi(w_1)\overset{\widehat{j_1}\ldots\widehat{j_k}}{\ldots}\varphi(w_n): \prod_{l=1}^{k}\langle\varphi(z_{i_l})\varphi(w_{j_l})\rangle.$$

Вернемся к операторным экспонентам. Интересны три разновидности таких экспонент. Во-первых, это формальные экспоненты $[e^{i\alpha\varphi(z)}]_{\mathrm{nonren}}$. Во-вторых, это экспоненты, переопределенные соотношениями (22), $[e^{i\alpha\varphi(z)}]_{\mathrm{ren}}$. И, в-третьих, это нормальные экспоненты $:e^{i\alpha\varphi(z)}:$.

Операторные произведения формальных экспонент

$$[e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}]_{\mathrm{nonren}}[e^{i\alpha_2\varphi(z_2)}]_{\mathrm{nonren}} = e^{-\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2[\varphi(z_1),\varphi(z_2)]}[e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+i\alpha_2\varphi(z_2)}]_{\mathrm{nonren}}$$

довольно плохо определены, так как содержат плохо определенный коммутатор. Корреляционные функции формальных экспонент

$$\langle[e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}]_{\mathrm{nonren}}\cdots[e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}]_{\mathrm{nonren}}\rangle = \left(\frac{r_0}{R}\right)^{\frac{1}{2}\sum_i\alpha_i^2}\prod_{i<j}\left(\frac{z_i-z_j}{R}\right)^{\alpha_i\alpha_j}$$

содержат ультрафиолетовые расходимости. Таким образом, формальные экспоненты плохо определены.

Нормальные экспоненты хорошо определены, все их корреляторы ультрафиолетово конечны. Например,

$$\langle :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+\cdots+i\alpha_n\varphi(z_n)}: \rangle = 1.$$

Проблема в том, что корреляторы нормальных экспонент явно содержат инфракрасную обрезку. Действительно, раскладывая экспоненты в ряды, можно убедиться, что

$$[e^{i\alpha\varphi(z)}]_{\text{nonren}} = \left(\frac{r_0}{R}\right)^{\alpha^2/2} :e^{i\alpha\varphi(z)}: .$$

Операторные произведения нормальных экспонент имеют вид

$$:e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}:\ :e^{i\alpha_2\varphi(z_2)}: = \left(\frac{z_1-z_2}{R}\right)^{\alpha_1\alpha_2} :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+i\alpha_2\varphi(z_2)}: .$$

Корреляционные функции имеют вид

$$\langle :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}: \ldots :e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}: \rangle = \prod_{i<j}\left(\frac{z_i-z_j}{R}\right)^{\alpha_i\alpha_j} .$$

Все эти выражения явно содержат параметр инфракрасной обрезки R. Давайте *определим* перенормированные экспоненты условием

$$[e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+\ldots+i\alpha_n\varphi(z_n)}]_{\text{ren}} \overset{\text{def}}{=} R^{-\frac{1}{2}\left(\sum_i \alpha_i\right)^2} :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+\ldots+i\alpha_n\varphi(z_n)}: .$$

В случае $n = 1$ это определение совпадает с определением (22). Для таких перенормированных экспонент операторное произведение хорошо определено и не содержит инфракрасной обрезки:

$$[e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}]_{\text{ren}}[e^{i\alpha_2\varphi(z_2)}]_{\text{ren}} = (z_1-z_2)^{\alpha_1\alpha_2}[e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+i\alpha_2\varphi(z_2)}]_{\text{ren}}.$$

Корреляционная функция формально содержит инфракрасную обрезку:

$$\langle [e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}]_{\text{ren}} \cdots [e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}]_{\text{ren}}\rangle = R^{-\frac{1}{2}\left(\sum_i \alpha_i\right)^2}\prod_{i<j}(z_i-z_j)^{\alpha_i\alpha_j}.$$

Однако это выражение имеет хороший предел при $R \to \infty$:

$$\langle [e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}]_{\text{ren}} \cdots [e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}]_{\text{ren}}\rangle = \begin{cases} \prod_{i<j}(z_i-z_j)^{\alpha_i\alpha_j}, & \text{если } \sum_i \alpha_i = 0 \\ 0, & \text{если } \sum_i \alpha_i \neq 0 \end{cases} .$$

В частности, на бесконечной плоскости

$$\langle [e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+\ldots+i\alpha_n\varphi(z_n)}]_{\text{ren}}\rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_i \alpha_i = 0 \\ 0, & \text{если } \sum_i \alpha_i \neq 0 \end{cases} .$$

Задачи

1. Вывести формулу (16).

2. Показать, что для свободного поля ϕ с действием $S_0[\phi]$ парная корреляционная функция равна

$$\langle \phi(x)\phi(y)\rangle = \log\frac{R^2}{(x-y)^2}$$

с некоторым масштабом инфракрасного обрезания R.

3. Вывести формулы (23).

4. Предположим, что поле $\phi(x)$ с действием $S_0[\phi]$ определено на окружности радиуса R ($\phi \sim \phi + 2\pi R$) и живет на пространственной окружности ($x^1 \sim x^1 + 2\pi$) с периодическими граничными условиями. Показать, что теория эквивалентна теории поля $\tilde\phi(x)$, определенного на окружности радиуса $2/R$ (*T-дуальность*). Для решения задачи можно использовать разложение по модам в гамильтоновом формализме. При этом следует учесть, что при обходе по пространственному циклу поле может измениться на целое число периодов эквивалентности $2\pi R$ (число намотки). При преобразовании дуальности число намотки и квантовое число импульса меняются местами.