Лекция 11
Задача Кондо: вывод анзаца Бете

Начиная с 30-х годов наблюдался минимум в температурной зависимости сопротивления некоторых, казалось, чистых металлов (золота, серебра, меди) при низких температурах. Позднее оказалось, что аномалия связана с наличием малой концентрации примесных атомов переходных металлов (Mn, Fe, Cr, Co, Ce, Y). Джюн Кондо (1964) объяснил это явление рассеянием электронов на примесях, описываемом взаимодействием (*sd-модель*)

$$V = J\sum_i \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{S}_i\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_i) \tag{1}$$

В борновском приближении амплитуда рассеяния на одиночной примеси пропорциональна

$$J(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{S})_{\sigma'\sigma}.$$

Так как J в несколько раз меньше ϵ_F/n (n — концентрация электронов), эта амплитуда мала. Однако первая поправка к борновской амплитуде содержит логарифмические члены и сумма членов первого и второго порядка по J равна[1]

$$J(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{S})_{\sigma'\sigma}\left(1+J\rho(\epsilon_F)\log\frac{\epsilon_F}{\max(|\epsilon_{\boldsymbol{p}}-\epsilon_F|,T)}\right), \tag{2}$$

где $\rho(\epsilon)$ — плотность состояний. Эта поправка растет при $T\to 0$ и при энергиях электрона, близких к ϵ_F, и теория возмущений, в конце концов, становится непригодной. Характерная температура, при которой теория возмущений непригодна, называемая *температурой Кондо*, равна

$$T_K \sim \epsilon_F e^{-1/J\rho(\epsilon_F)}. \tag{3}$$

Эта температура является единственной характерной шкалой в эффекте Кондо.

Давайте приведем краткий вывод выражения (2). Двукратное рассеяние может происходить двумя способами. Во-первых, электрон в состоянии $\boldsymbol{p}\sigma$ может перейти сначала в состояние $\boldsymbol{p}''\sigma''$, а затем в конечное состояние $\boldsymbol{p}'\sigma'$. Амплитуда этого процесса пропорциональна

$$J^2\sum_{\sigma''}\int\frac{d^3p''}{(2\pi)^3}\,\frac{(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{S})_{\sigma'\sigma''}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{S})_{\sigma''\sigma}(1-f(\boldsymbol{p}''))}{\epsilon_{\boldsymbol{p}}-\epsilon_{\boldsymbol{p}''}},$$

где $f(\boldsymbol{p})$ — функция распределения. Индексы, связанные с состоянием примеси, опущены. Во-вторых, сначала электрон из заполненного состояния $\boldsymbol{p}''\sigma''$ переходит в состояние $\boldsymbol{p}'\sigma'$, а уже потом электрон из состояния $\boldsymbol{p}\sigma$ переходит в состояние $\boldsymbol{p}''\sigma''$. Амплитуда этого перехода пропорциональна (с тем же коэффициентом пропорциональности)

$$-J^2\sum_{\sigma''}\int\frac{d^3p''}{(2\pi)^3}\,\frac{(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{S})_{\sigma''\sigma}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{S})_{\sigma'\sigma''}f(\boldsymbol{p}'')}{\epsilon_{\boldsymbol{p}''}-\epsilon_{\boldsymbol{p}'}}.$$

Знак минус связан с антисимметрией волновых функций электронов. Если бы спиновых множителей не было, вклады, содержащие $f(\boldsymbol{p}'')$, сократились бы, и логарифмически большого множителя не было бы. Но для спиновых множителей имеем:

$$\sigma^i S^i\sigma^j S^j = S(S+1)-\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{S},$$
$$\sigma^i S^j\sigma^j S^i = S(S+1)+\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{S}.$$

Мы получаем интеграл

$$J^2\int\frac{d^3p''}{(2\pi)^3}\left(\frac{S(S+1)\delta_{\sigma'\sigma}}{\epsilon_{\boldsymbol{p}}-\epsilon_{\boldsymbol{p}''}}+\frac{2f(\boldsymbol{p}'')-1}{\epsilon_{\boldsymbol{p}}-\epsilon_{\boldsymbol{p}''}}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{S})_{\sigma'\sigma}\right).$$

Первый член не имеет особенности при $\epsilon_{\boldsymbol{p}''} = \mu$ и дает конечный вклад вблизи поверхности Ферми. Второй член дает вклад, логарифмически расходящийся при нулевой температуре. Он и дает (2).

Удельное сопротивление в первом порядке равно

$$\rho = \rho_v + \rho_J^{(0)} \left(1 + 2J\rho(\epsilon_F) \log \frac{\epsilon_F}{T}\right).$$

В случае ферромагнитного взаимодействия ($J < 0$) вклад магнитных примесей падает при уменьшении температуры, в то время как в случае антиферромагнитного взаимодействия ($J > 0$) — растет.

Оказывается, можно просуммировать логарифмические члены во всех порядках теории возмущений (Абрикосов, 1965; Сул, 1965):

$$\rho = \rho_v + \frac{\rho_J^{(0)}}{\left(1 - J\rho(\epsilon_F) \log \frac{\epsilon_F}{T}\right)^2}.$$

Однако при $T \sim T_K$ это выражение имеет особенность, так что ограничиться только логарифмическими поправками нельзя.

Были наблюдены также и аномалии в термодинамических характеристиках металлов с магнитными примесями, например, теплоемкости C и магнитной восприимчивости χ. При больших температурах примесный вклад в эти величины с хорошей точностью описывается обратными степенями логарифма:

$$\begin{aligned}
\rho_{\text{imp}}(T) &\simeq \frac{\text{const}}{\log^2 \frac{T}{T_K}}, \\
C_{\text{imp}}(T) &\simeq \frac{\text{const}}{\log^2 \frac{T}{T_K}}, \\
\chi_{\text{imp}}(T) &\simeq \frac{\text{const}}{T \log \frac{T}{T_K}}, \qquad T \gg T_K.
\end{aligned}$$

При $T \to 0$ наблюдается другое поведение:

$$\begin{aligned}
\rho_{\text{imp}}(T) &= \rho_{\text{imp}}(0)\left(1 - \kappa_R \left(\frac{T}{T_K}\right)^2 + \dots\right), \\
C_{\text{imp}}(T) &= \gamma \frac{T}{T_K}\left(1 - \kappa_C \left(\frac{T}{T_K}\right)^2 + \dots\right), \\
\chi_{\text{imp}}(T) &= \chi_0\left(1 - \kappa_\chi \left(\frac{T}{T_K}\right)^2 + \dots\right),
\end{aligned}$$

где κ_R, κ_C, κ_χ — величины порядка единицы.

Решение этой задачи при $T \lesssim T_K$ кажется довольно безнадежным. Тем не менее, в некотором приближении эта задача сводится к задаче, точно решаемой с помощью анзаца Бете (Вигман, 1980; Андрей, 1980). На эту тему есть хорошие обзоры[2, 3].

Запишем гамильтониан *sd*-модели в виде

$$H = H_0 + J\boldsymbol{\sigma}(0)\boldsymbol{S}, \qquad H_0 = \sum_{\boldsymbol{p}\sigma} \epsilon_{\boldsymbol{p}} c^+_{\boldsymbol{p}\sigma} c_{\boldsymbol{p}\sigma}, \qquad \boldsymbol{\sigma}(0) = \sum_{\boldsymbol{p}'\sigma',\boldsymbol{p}\sigma} c^+_{\boldsymbol{p}'\sigma'} \boldsymbol{\sigma}_{\sigma'\sigma} c_{\boldsymbol{p}\sigma}. \tag{4}$$

Здесь предполагается, что в системе имеется только одна примесь, изотропно взаимодействующая со свободными электронами. Кроме того, потенциальное рассеяние на примеси отсутствует. Будем также предполагать, что $\epsilon_{\boldsymbol{p}}$ не зависит от направления импульса, а спектр вблизи ферми-сферы имеет вид

$$\epsilon_{\boldsymbol{p}} = \epsilon_F + v_F(p - p_F). \tag{5}$$

Разложим теперь операторы рождения-уничтожения по сферическим функциям:

$$c^+_{\boldsymbol{p}\sigma} = \sum_{lm} Y_{lm}(\boldsymbol{p}/p) c^+_{plm\sigma}. \tag{6}$$

В силу ортогональности сферических гармоник гамильтониан взаимодействия содержит только компоненты с $l = m = 0$:

$$H = \sum_{plm\sigma} \epsilon_p c^+_{plm\sigma} c_{plm\sigma} + J \sum_{p'\sigma',p\sigma} c^+_{p'00\sigma'} c_{p00\sigma} \boldsymbol{\sigma}_{\sigma'\sigma} \boldsymbol{S}. \tag{7}$$

Электроны с $l > 0$ не взаимодействуют с электронами с $l = 0$ и друг с другом, и их вклад тривиален. Нетривиальная часть задачи состоит в исследовании вклада в гамильтониан электронов с $l = 0$. Будем отсчитывать энергию электронов от энергии Ферми, а квазиимпульс от p_F. Кроме того, положим для простоты $v_F = 1$. Получаем

$$H = \sum_{p\sigma} p c^+_{p\sigma} c_{p\sigma} + J \sum_{p'p\sigma'\sigma} c^+_{p'\sigma'} c_{p\sigma} \boldsymbol{\sigma}_{\sigma'\sigma} \boldsymbol{S}, \tag{8}$$

где $c_{p\sigma} = c_{p_F+p,00\sigma}$, а суммирование производится по всем вещественным p. Этот гамильтониан — одномерный. Более того, по существу, это гамильтониан, определенный на всей вещественной оси x, а не только на полуоси $x < 0$, поскольку отраженная и падающая волна не взаимодействуют друг с другом. При этом, однако, волны в системе могут двигаться только в одном (положительном) направлении. Циклическому граничному условию на интервале $[-R, R)$ будет соответствовать условие отражения волны на сфере радиуса R в физическом пространстве. В координатном представлении гамильтониан имеет вид

$$H = \int dx \left(-ic^+(x)\partial_x c(x) + Jc^+(x)(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{S})c(x)\delta(x)\right), \qquad c(x) = \begin{pmatrix} c_+(x) \\ c_-(x) \end{pmatrix} = \sum_p e^{ipx} \begin{pmatrix} c_{p+} \\ c_{p-} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Гамильтониан H сохраняет число частиц в системе и суммарный спин. Состояние $|\Psi_N\rangle$ системы с фиксированным числом частиц N можно представить в виде

$$|\Psi_N\rangle = \int dx_1 \dots dx_N \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_N, s} \Psi^{\sigma_1 \dots \sigma_N, s}(x_1, \dots, x_N) c^+_{\sigma_1}(x_1) \dots c^+_{\sigma_N}(x_N) (S^-)^{S-s} |\Omega\rangle, \tag{10}$$

где $s = -S, -S+1 \dots, S$ — значение z-компоненты спина $\boldsymbol{S}$, а $|\Omega\rangle$ — псевдовакуумное состояние, удовлетворяющее условиям

$$c_\sigma(x)|\Omega\rangle = S^+|\Omega\rangle = 0. \tag{11}$$

Гамильтониан (9) действует на состояние $|\Psi_N\rangle$ так:

$$\hat{H}\Psi^{\sigma_1 \dots \sigma_N, s} = -i \sum_{j=1}^N \partial_{x_j} \Psi^{\sigma_1 \dots \sigma_N, s} + J \sum_{j=1}^N \sum_{\sigma'_j, s'} \delta(x_j) \boldsymbol{\sigma}_{\sigma_j \sigma'_j} \boldsymbol{S}_{ss'} \Psi^{\sigma_1 \dots \sigma'_j \dots \sigma_N, s'} \tag{12}$$

Рассмотрим сначала одночастичное состояние. Мы будем искать решение в виде

$$\Psi_p^{\sigma,s}(x) = \begin{cases} A_p^{\sigma,s} e^{ipx}, & x < 0, \\ B_p^{\sigma,s} e^{ipx}, & x > 0. \end{cases} \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), получаем

$$A_p^{\sigma,s} = \sum_{\sigma',s'} R^{\sigma s}_{\sigma' s'} B_p^{\sigma',s'}, \qquad R = e^{iJ\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{S}}. \tag{14}$$

Теперь, казалось бы, можно элементарно построить волновую функцию произвольного состояния как антисимметризованное произведение волновых функций вида (13). Это, однако, не так. Дело в том, что в модели имеется дополнительная динамическая переменная s. Рассмотрим, например, область $x_1, x_2 < 0$. Предположим, что в этой области волновая функция непрерывна. Продолжим волновую функцию в область $x_1 < 0 < x_2$. Частица 2 рассеялась на примеси, поэтому волновая функция в этой области будет отличаться фактором рассеяния R_{20}. Продолжив в область $0 < x_1 < x_2$, мы получим фактор $R_{20}R_{10}$. Аналогично, продолжение сначала в область $x_2 < 0 < x_1$, а затем в область $0 < x_2 < x_1$, получим фактор $R_{10}R_{20}$. Но

$$R_{20}R_{10} \neq R_{10}R_{20}.$$

Отсюда следует, что на линии $x_1 = x_2$ в области $x_1, x_2 > 0$ волновая функция имеет разрыв.

Мы будем рассматривать решения, имеющие разрывы при $x_1 = x_2$ как в области $x_1, x_2 > 0$, так и в области $x_1, x_2 < 0$. Посмотрим, какие разрывы совместны с уравнением Шредингера. Пусть, например, $x_1, x_2 < 0$. Согласно уравнению Шредингера, имеем

$$(\partial_{x_1} + \partial_{x_2})\Psi^{\sigma_1\sigma_2,s}(x_1, x_2) = (\text{конечное при } x_1 = x_2 \text{ выражение}).$$

Это условие допускает произвольный разрыв волновой функции при $x_1 = x_2$. Действительно,

$$\begin{aligned}\partial_{x_1}\Psi(x_1, x_2) &= \delta(x_1 - x_2)(\Psi(x_1 + 0, x_2) - \Psi(x_1 - 0, x_2)) + \dots,\\ \partial_{x_2}\Psi(x_1, x_2) &= \delta(x_1 - x_2)(\Psi(x_1, x_2 + 0) - \Psi(x_1, x_2 - 0)) + \dots\\ &= -\delta(x_1 - x_2)(\Psi(x_1 + 0, x_2) - \Psi(x_1 - 0, x_2)) + \dots.\end{aligned}$$

Поэтому можно выбрать любой разрыв.

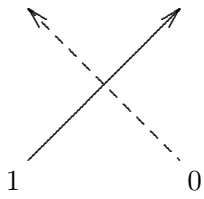
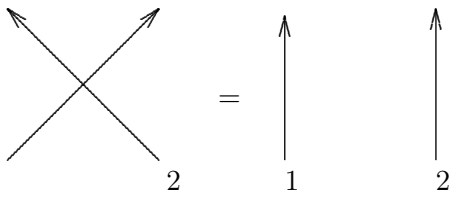
Мы будем искать решение уравнения Шредингера в виде анзаца Бете по переменным (σ_1, x_1), … , (σ_N, x_N), $(s, 0)$, причем обратная матрица рассеяния для частицы $j \neq 0$ с частицей 0 (примесью) будет даваться матрицей R, а обратная матрица рассеяния двух электронов $j, j' \neq 0$ будет даваться некоторой матрицей S, которую мы найдем из условий ассоциативности (уравнения Янга—Бакстера):

$$S_{12}R_{10}R_{20} = R_{20}R_{10}S_{12}. \tag{15}$$

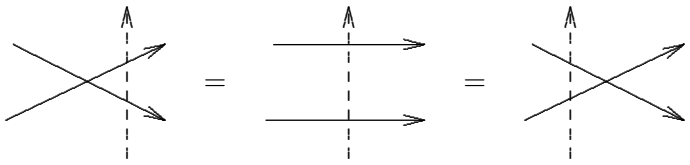
Очевидным решением этого уравнения является матрица перестановки

$$S_{12} = P_{12}, \qquad P^{\sigma_1'\sigma_2'}_{\sigma_1\sigma_2} = \delta^{\sigma_1'}_{\sigma_2}\delta^{\sigma_2'}_{\sigma_1}. \tag{16}$$

Если обозначать частицы сплошными линиями, а примесь пунктиром, то графически это выглядит так:

$R_{10} =$  $= e^{J\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{S}}$, $S_{12} =$  $= P_{12}$.

В этих обозначениях доказательство (15) при $S = P$ выглядит очевидно:



Теперь наложим циклическое граничное условие

$$\Psi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) = \Psi(x_1, \dots, x_j + L, \dots, x_N). \tag{17}$$

Введем оператор

$$T_j = P_{jj-1} \dots P_{j1}R_{j0}P_{jN} \dots P_{jj+1}. \tag{18}$$

Из циклического граничного условия (17) следует, что

$$e^{ip_jL}\Psi = T_j\Psi. \tag{19}$$

Это значит, что решение задачи сводится к совместной диагонализации операторов T_j. Легко видеть, что операторы T_j совпадают. Действительно, их можно записать в виде

$$T_j = T = \mathrm{tr}_{\tilde{1}}(P_{\tilde{1}N} \dots P_{\tilde{1}1}R_{\tilde{1}0}), \tag{20}$$

где $\tilde{1}$ — индекс вспомогательного пространства. Дополнительный оператор $P_{\tilde{1}j}$ превращает произведение операторов в след.

Как диагонализовать трансфер-матрицу T? Для этого надо повторно использовать анзац Бете (*вторичный анзац Бете*), причем удобнее воспользоваться алгебраическим анзацем. Но для этого необходимо построить семейство коммутирующих трансфер-матриц.

Давайте построим однопараметрические семейства R-матриц $R(u)$, $S(u)$, удовлетворяющие следующим условиям.

1. Матрицы $R(u)$ и $S(u)$ удовлетворяют уравнению Янга—Бакстера:

$$S_{12}(u_1-u_2)R_{10}(u_1-u_0)R_{20}(u_2-u_0) = R_{20}(u_2-u_0)R_{10}(u_1-u_0)S_{12}(u_1-u_2), \tag{21a}$$
$$S_{12}(u_1-u_2)S_{13}(u_1-u_3)S_{23}(u_2-u_3) = S_{23}(u_2-u_3)S_{13}(u_1-u_3)S_{12}(u_1-u_2). \tag{21b}$$

2. В специальных точках матрицы $S(u)$ и $R(u)$ совпадают с S и R:

$$S(0) = P, \qquad R(1) = R = e^{iJ\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{S}}. \tag{22}$$

3. R-матрицы удовлетворяют условию унитарности:

$$S_{12}(u)S_{21}(-u) = 1, \qquad R_{10}(u)R_{10}(-u) = 1. \tag{23}$$

Решение можно представить в виде

$$\begin{aligned} S_{12}(u) &= w_0(u) + w(u)\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2, \\ R_{10}(u) &= w_0'(u) + 2w'(u)\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{S}_0. \end{aligned} \tag{24}$$

Удобно ввести обозначения

$$\begin{aligned} a &= w_0 + w, \qquad & b &= w_0 - w, \qquad & c &= 2w, \\ a' &= w_0' + w', \qquad & b' &= w_0' - w', \qquad & c' &= 2w'. \end{aligned} \tag{25}$$

В этом случае матрица $S(u)$ имеет тот же вид, что и R-матрица XXZ-модели:

$$S(u) = \begin{pmatrix} a(u) & & & \\ & b(u) & c(u) & \\ & c(u) & b(u) & \\ & & & a(u) \end{pmatrix}.$$

Решая уравнение Янга—Бакстера, находим

$$\begin{aligned} \frac{b(u)}{a(u)} &= \frac{b'(u)}{a'(u)} = \frac{u}{u+ig}, \\ \frac{c(u)}{a(u)} &= \frac{c'(u)}{a'(u)} = \frac{ig}{u+ig}, \end{aligned} \tag{26}$$

т. е. $S(u)$ совпадает (с точностью до изменения масштаба спектрального параметра и некоторого несложного несложного матричного преобразования, меняющего знаки) с R-матрицей для XXX-модели.

Условие унитарности требует чтобы

$$a(u)a(-u) = 1, \qquad a'(u)a'(-u) = \frac{g^2+u^2}{g^2(S+1/2)^2+u^2}. \tag{27}$$

Наконец условие (22) дает

$$a(0) = 1, \qquad a'(1) = \frac{1+ig}{2}(e^{iJS} + e^{-iJ(S+1)}) \tag{28}$$

и

$$g = \frac{1}{S+1/2}\operatorname{tg} J(S+1/2). \tag{29}$$

В остальном $a(u)$, $a'(u)$ — произвольные функции.

Далее, однопараметрическое семейство трансфер-матриц имеет вид

$$T(u) = \mathrm{tr}_{\tilde{1}}\, L_{\tilde{1}}(u), \qquad L_{\tilde{1}}(u) = S_{\tilde{1}N}(u)\dots S_{\tilde{1}1}(u) R_{\tilde{1}0}(u+1), \tag{30}$$

причем

$$T(0) = T, \qquad [T(u), T(v)] = 0. \tag{31}$$

L-операторы удовлетворяют соотношениям

$$S_{\tilde{1}\tilde{2}}(u_1 - u_2) L_{\tilde{1}}(u_1) L_{\tilde{2}}(u_2) = L_{\tilde{2}}(u_2) L_{\tilde{1}}(u_1) S_{\tilde{1}\tilde{2}}(u_1 - u_2). \tag{32}$$

Как и в случае XXZ-модели, L-оператор может быть представлен в виде

$$L(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}, \tag{33}$$

причем $A(u), \dots, D(u)$ удовлетворяют соотношениям того же вида, что и в случае XXZ-модели, но с другими $a(u)$, $b(u)$, $c(u)$. Отсюда следует, что и решение будет примерно таким же.

Именно, псевдовакуум $|\Omega_N\rangle$, соответствующий всем спинам электронов, смотрящим вверх ($\sigma_j = +$), и $s = +S$, определяется условием

$$C(u)|\Omega_N\rangle = 0. \tag{34}$$

Анзац Бете имеет вид

$$|u_1, \dots, u_n\rangle = B(u_1)\dots B(u_n)|\Omega_N\rangle, \qquad S^z = N/2 + S - n, \tag{35}$$

причем

$$\begin{aligned} A(u)|\Omega_N\rangle &= \Lambda_A(u)|\Omega_N\rangle, & \Lambda_A(u) &= ((S+1/2)a'(u+1) - (S-1/2)b'(u+1))a^N(u), \\ D(u)|\Omega_N\rangle &= \Lambda_D(u)|\Omega_N\rangle, & \Lambda_D(u) &= ((S+1/2)b'(u+1) - (S-1/2)a'(u+1))b^N(u). \end{aligned} \tag{36}$$

Уравнения Бете записываются в стандартном виде

$$\frac{\Lambda_D(u_i)}{\Lambda_A(u_i)} = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{a(u_j - u_i) b(u_i - u_j)}{b(u_j - u_i) a(u_i - u_j)}, \tag{37}$$

а собственные значения выражаются через корни уравнений Бете как

$$\Lambda(u; u_1, \dots, u_N) = \Lambda_A(u) \prod_{i=1}^{n} \frac{a(u_i - u)}{b(u_i - u)} + \Lambda_D(u) \prod_{i=1}^{n} \frac{a(u - u_i)}{b(u - u_i)}. \tag{38}$$

Уравнение (19) принимает вид

$$e^{ip_j L} = \Lambda(0; u_1, \dots, u_N). \tag{39}$$

Подставляя в (37) и (38), (39) явные формулы для $a(u)$ и $b(u)$ и заменяя

$$u_j = g(v_j - i/2),$$

получим уравнения Бете в виде

$$\left(\frac{v_i + i/2}{v_i - i/2}\right)^N \frac{v_i + iS + g^{-1}}{v_i - iS + g^{-1}} = -\prod_{j=1}^{n} \frac{v_i - v_j + i}{v_i - v_j - i}, \tag{40}$$

и

$$e^{ip_j L} = e^{iJS} \prod_{i=1}^{n} \frac{v_i + i/2}{v_i - i/2}. \tag{41}$$

Это сводит решение задачи Кондо к совместному решению уравнений (40) и (41).

Литература

[1] А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, М., «Наука», 1987

[2] A. M. Tsvelik and P. B. Wiegmann, *Exact results in the theory of magnetic alloys*, Advances in Physics **32** (1983) 453

[3] P. B. Wiegmann, *An exact solution of the Kondo problem*, in: Quantum Theory of Solids, M., "Mir", 1982

Задачи

1. Выведите (14).

2. Покажите, что трансфер-матрицы $T(u)$, определенные (30), действительно образуют семейство коммутирующих трансфер-матриц.

3. Покажите, что матрицы $S(u)$, $R(u)$, определенные в (24)— (26), удовлетворяют уравнениям Янга—Бакстера (21).

4. Выведите соотношения (27)— (29).

5*. Постройте решения уравнений (21) с тригонометрической зависимостью от спектрального параметра u. Покажите, что такие решения отвечают задаче Кондо с анизотропным взаимодействием электронов с примесью.