Лекция 10
Алгебраический анзац Бете. Решение уравнений Бете

Вернемся к определению L-оператора:

$$L(u) = R_{0N}(u)\ldots R_{02}(u)R_{01}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Рассмотрим матричный элемент $B(u) = L(u)^{+}_{-}$. Этот элемент уменьшает спин на единицу:

$$[S^z, B(u)] = -1. \tag{2}$$

Подействуем этим оператором на псевдовакуум $|\Omega_+\rangle$. Мы получим плоскую волну

$$B(u)|\Omega_+\rangle = \sum_j b^{j-1}(u)c(u)a^{N-j}(u)|j\rangle = \frac{a^N(u)c(u)}{b(u)}\sum_j \left(\frac{b(u)}{a(u)}\right)^j |j\rangle. \tag{3}$$

Роль импульса здесь играет параметр u, определяющий отношение $z = b(u)/a(u)$. Несколько сложнее получить следующее состояние:

$$B(u_1)B(u_2)|\Omega_+\rangle = \frac{a_1^N a_2^N c_1 c_2}{b_1 b_2}\sum_{j_1<j_2}\left(\frac{a_{21}}{b_{21}}z_1^{j_1}z_2^{j_2} + \frac{a_{12}}{b_{12}}z_1^{j_2}z_2^{j_1}\right)|j_1, j_2\rangle, \tag{4}$$

где $a_i = a(u_i)$, $a_{ij} = a(u_i - u_j)$ и т. п., $z_i = b_i/a_i$. Прямым вычислением можно показать, что

$$S(z_1, z_2) = \frac{a(u_1-u_2)b(u_2-u_1)}{b(u_1-u_2)a(u_2-u_1)}, \qquad z_i = \frac{b(u_i)}{a(u_i)}. \tag{5}$$

Исходя из этих примеров можно предположить, что состояния вида

$$|u_1, u_2, \ldots, u_n\rangle = B(u_1)B(u_2)\ldots B(u_n)|\Omega_+\rangle \tag{6}$$

имеют структуру волновых функций Бете с $z_j = b(u_j)/a(u_j)$. Выражение (6) именуется *алгебраическим анзацем Бете*. Чтобы понять, действительно ли это выражение дает собственные векторы, рассмотрим коммутационные соотношения, следующие из уравнения Янга—Бакстера:

$$R_{12}(u_1-u_2)L_1(u_1)L_2(u_2) = L_2(u_2)L_1(u_1)R_{12}(u_1-u_2).$$

Во-первых, $^{++}_{--}$-компонента этого соотношения дает

$$B(u_1)B(u_2) = B(u_2)B(u_1). \tag{7}$$

Это значит, что состояния (6) симметричны по $u_1, \ldots, u_n$. Во-вторых, из компонент $^{++}_{-+}$ и $^{-+}_{--}$ имеем соотношения

$$a(u_1-u_2)B(u_1)A(u_2) = c(u_1-u_2)B(u_2)A(u_1) + b(u_1-u_2)A(u_2)B(u_1), \tag{8}$$
$$a(u_2-u_1)B(u_1)D(u_2) = c(u_2-u_1)B(u_2)D(u_1) + b(u_2-u_1)D(u_2)B(u_1). \tag{9}$$

Из этих соотношений можно вывести тождества

$$\begin{aligned} A(u)|u_1,\ldots,u_n\rangle &= \alpha(u;u_1,\ldots,u_n)|u_1,\ldots,u_n\rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{c(u_i-u)}{b(u_i-u)}\alpha(u_i;u_1,\ldots,\widehat{u}_i,\ldots,u_n)|u,u_1,\ldots,\widehat{u}_i,\ldots,u_n\rangle, \\ D(u)|u_1,\ldots,u_n\rangle &= \delta(u;u_1,\ldots,u_n)|u_1,\ldots,u_n\rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{c(u-u_i)}{b(u-u_i)}\delta(u_i;u_1,\ldots,\widehat{u}_i,\ldots,u_n)|u,u_1,\ldots,\widehat{u}_i,\ldots,u_n\rangle, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\alpha(u;u_1,\dots,u_n)=a^N(u)\prod_{i=1}^{n}\frac{a(u_i-u)}{b(u_i-u)},\qquad \delta(u;u_1,\dots,u_n)=b^N(u)\prod_{i=1}^{n}\frac{a(u-u_i)}{b(u-u_i)}. \tag{11}$$

Соотношения (10) доказываются по индукции.

Из соотношений (10) получаем

$$T(u)|u_1,\dots,u_n\rangle=(\alpha(u;u_1,\dots,u_n)+\delta(u;u_1,\dots,u_n))|u_1,\dots,u_n\rangle+\text{плохие члены}.$$

Чтобы вектор $|u_1,\dots,u_n\rangle$ был собственным, сумма плохих членов должна быть равна нулю. В этом случае собственное значение трансфер-матрицы будет равно

$$\Lambda(u;u_1,\dots,u_n)=a^N(u)\prod_{i=1}^{n}\frac{a(u_i-u)}{b(u_i-u)}+b^N(u)\prod_{i=1}^{n}\frac{a(u-u_i)}{b(u-u_i)}. \tag{12}$$

Отметим, что плохие члены, по сути, набегают в точках $n=1,N$ и условие их сокращения эквивалентна условию периодичности.

Так как $\frac{c(u)}{b(u)}=-\frac{c(-u)}{b(-u)}$, плохие члены сокращаются, если

$$\alpha(u_i;u_1,\dots,\widehat{u_i},\dots,u_n)=\delta(u_i;u_1,\dots,\widehat{u_i},\dots,u_n)$$

или

$$\left(\frac{b(u_i)}{a(u_i)}\right)^N=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{a(u_j-u_i)b(u_i-u_j)}{b(u_j-u_i)a(u_i-u_j)}, \tag{13}$$

Это и есть уравнения Бете. Каждому решению уравнений Бете соответствует некоторый собственный вектор трансфер-матрицы (и гамильтониана), так что состояния можно нумеровать наборами $\{u_i\}_{i=1}^n$.

Более явно перепишем уравнения Бете в виде

$$\left(\frac{\sin u_i}{\sin(\lambda-u_i)}\right)^N=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{\sin(u_i-u_j+\lambda)}{\sin(u_i-u_j-\lambda)}\qquad \text{при } c<a+b \text{ и т. д. } (|\Delta|<1), \tag{14}$$

$$\left(\frac{\operatorname{sh} u_i}{\operatorname{sh}(\lambda-u_i)}\right)^N=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{\operatorname{sh}(u_i-u_j+\lambda)}{\operatorname{sh}(u_i-u_j-\lambda)}\qquad \text{при } c>a+b\ (\Delta<-1). \tag{15}$$

Режим $\Delta<-1$ соответствует наличию двух основных конфигураций шестивершинной модели, для которых конфигурации вокруг всех вершин имеют c-тип, и двукратному (в термодинамическом пределе) вырождению основного состояния XXZ-модели. Возбужденные состояния в XXZ-модели отделены от основного щелью. В этом случае говорят об антисегнетоэлектрическом упорядочении шестивершинной модели и антиферромагнитном основном состоянии XXZ-модели. В режиме $|\Delta|<1$ имеется бесконечно много (на бесконечной решетке) основных конфигураций шестивершинной модели (неупорядоченное критическое состояние) и бесщелевой спектр вблизи основного состояния в XXZ-модели. В обоих случаях основному состоянию отвечают состояния с $S^z=0$ или $S^z=\pm\frac{1}{2}$ в зависимости от четности n.

Покажем, как найти наибольшее собственное значение $\Lambda_{\max}(u)$ в этой модели в термодинамическом пределе. Сделаем следующие предположения:

1) В основном состоянии плоские волны не содержат ни экспоненциально растущих, ни экспоненциально спадающих членов, так что $|z_i|\equiv|b(u_i)/a(u_i)|=1$ или $u_i=\lambda/2+iv_i$ с вещественными v_i.

2) В основном состоянии v_i сгущаются в термодинамическом пределе, образуя непрерывные зоны без дырок и отдельно стоящих значений.

3) В основном состоянии $S^z/N\to 0$.

Для определенности будем рассматривать случай $|\Delta|<1$.

Уравнения Бете удобно прологорифмировать. Введем обозначения

$$e^{ip(v)}=\frac{\sin(\lambda/2+iv)}{\sin(\lambda/2-iv)},\qquad e^{i\theta(v)}=\frac{\sin(\lambda+iv)}{\sin(\lambda-iv)}. \tag{16}$$

Мы выбираем ветвь логарифма, такую что $p(0) = \theta(0) = 0$. Уравнения Бете записываются в виде

$$e^{iNp(v_i)} = (-)^{n-1} \prod_{j=1}^{n} e^{i\theta(v_i - v_j)}.$$

Прологарифмировав, получим

$$Np(v_i) = 2\pi I_i + \sum_{j=1}^{n} \theta(v_i - v_j),$$

где I_i — целое либо полуцелое в зависимости от четности n. Условие 2) мы можем теперь уточнить:

2') В основном состоянии все I_i образуют набор последовательных целых при нечетных n и полуцелых при четных n чисел.

В этом виде утверждение, по-видимому, верно не только в термодинамическом пределе. При малых n можно также показать, что

2a) Наибольшее собственное значение трансфер-матрицы в секторе с данным S^z достигается при симметричном распределении I_i (и v_i) вокруг нуля.

Найдем интервал, в котором будет изменяться v в непрерывном пределе. Для этого удобнее пользоваться гамильтонианом H_{XXZ}. Как мы уже говорили в прошлой лекции энергия состояния складывается из энергий псевдочастиц $\epsilon(z) = 2\Delta - z - z^{-1} = 2\Delta - 2\cos p(v)$. Наименьшей энергии отвечает значение $p = 0$, то есть $v = 0$. Псевдочастицы должны плотно заполнять область $-p_F \le p(v) \le p_F$, где p_F — импульс Ферми, $\epsilon(e^{\pm i p_F}) = \epsilon_F$. Поскольку функция $p(v)$ нечетна и монотонна, спектральный параметр v должен заметать область от $-v_F$ до v_F, где $p(v_F) = p_F$.

Имеем для основного состояния

$$p(v_{i+1}) - p(v_i) = \frac{2\pi}{N} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{n} (\theta(v_{i+1} - v_j) - \theta(v_i - v_j)).$$

В пределе $N \to \infty$ имеем

$$p'(v) = \rho(v) + \int_{-v_F}^{v_F} \frac{dv'}{2\pi}\, \theta'(v - v')\rho(v') \tag{17}$$

или

$$\rho(v) = \frac{2\sin\lambda}{\operatorname{ch} 2v - \cos\lambda} - \int_{-v_F}^{v_F} \frac{dv'}{2\pi}\, \frac{2\sin 2\lambda}{\operatorname{ch} 2(v - v') - \cos 2\lambda}\, \rho(v'), \tag{17$'$}$$

где $p'(v)$, $\theta'(v)$ — производные от $p(v)$, $\theta(v)$ по v, а $\rho(v) = \lim_{N\to\infty} \frac{2\pi}{N(v_{i+1} - v_i)}$ — плотность корней вблизи точки v, которая и будет неизвестной функцией в этом уравнении. Интервал $[-v_F, v_F]$ определяется из условия

$$\int_{-v_F}^{v_F} \frac{dv}{2\pi}\, \rho(v) = \frac{n}{N}. \tag{18}$$

Далее надо минимизировать энергию по n/N.

Уравнение (17) нетрудно решить методом Фурье при $v_F = \infty$. Положим

$$\rho(v) = \int dk\, \rho_k e^{ikv}, \qquad p'(v) = \int dk\, p'_k e^{ikv}, \qquad \theta'(v) = \int dk\, \theta'_k e^{ikv}. \tag{19}$$

Тогда

$$\rho_k = p'_k - \theta'_k \rho_k,$$

т. е.

$$\rho_k = \frac{p'_k}{1 + \theta'_k}.$$

Нетрудно проверить, что

$$p'_k = \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2}(\pi - \lambda)k}{\operatorname{sh} \frac{1}{2}\pi k}, \qquad \theta'_k = \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2}(\pi - 2\lambda)k}{\operatorname{sh} \frac{1}{2}\pi k}. \tag{20}$$

Отсюда получаем

$$\rho_k = \frac{1}{2\operatorname{ch}\frac{1}{2}\lambda k}. \tag{21}$$

Очевидно

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv\,\rho(v) = \rho_0 = \frac{1}{2},$$

а, значит, $n = N/2$ и $S^z/N \ll 1$. Таким образом, это решение соответствует основному состоянию системы.

В пределе $N \to \infty$ можно ожидать, что одно из слагаемых в (12) много больше другого, поэтому (минус) свободная энергия на одну вершину равна

$$\log\kappa(u) \equiv \lim_{N\to\infty}\frac{\log\Lambda(u)}{N} = \max\biggl(\log a(u) + \int_{-v_F}^{v_F} dv\,\rho(v)\log\frac{a(iv-u+\lambda/2)}{b(iv-u+\lambda/2)},$$
$$\log b(u) + \int_{-v_F}^{v_F} dv\,\rho(v)\log\frac{a(u-iv-\lambda/2)}{b(u-iv-\lambda/2)}\biggr). \tag{22}$$

Логарифмы правых частей легко выражаются через $p(v)$:

$$\log\kappa(u) = \max\biggl(\log a(u) + i\int_{-v_F}^{v_F} dv\,\rho(v)p(iu+v),$$
$$\log b(u) + i\int_{-v_F}^{v_F} dv\,\rho(v)p(i(\lambda-u)+v)\biggr). \tag{23}$$

В терминах фурье-образов это выглядит как

$$\kappa(u) = \max\left(\log a(u) + \int\frac{dk}{2\pi k}\rho_{-k}p'_k e^{ku}, \log b(u) + \int\frac{dk}{2\pi k}\rho_k p'_k e^{k(\lambda-u)}\right). \tag{24}$$

Подставляя (20) и (21), мы находим, что оба значения под знаком максимума в (22) совпадают и свободная энергия дается выражением

$$\log\kappa(u) = \log a(u) + \int_{-\infty}^{\infty} dk\,\frac{\operatorname{sh}uk\operatorname{sh}\frac{\pi-\lambda}{2}k}{2k\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}k\operatorname{ch}\frac{\lambda}{2}k}$$
$$= \log b(u) + \int_{-\infty}^{\infty} dk\,\frac{\operatorname{sh}(\lambda-u)k\operatorname{sh}\frac{\pi-\lambda}{2}k}{2k\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}k\operatorname{ch}\frac{\lambda}{2}k}. \tag{25}$$

В случае $\Delta < -1$ синусы заменяются на гиперболические синусы и функции $p'(v)$ и $\theta'(v)$ оказываются периодическими по v с периодом π. Это значит, что интеграл Фурье в (19) заменяется на ряд Фурье:

$$\int\frac{dk}{2\pi} \to \frac{1}{\pi}\sum_{k\in 2\mathbf{Z}}.$$

Фурье-компоненты равны

$$p'_k = 2\pi e^{-\lambda|k|/2}, \qquad \theta'_k = 2\pi e^{-\lambda|k|}. \tag{26}$$

Плотность опять выражается в виде (21), но с целыми четными k. Поэтому окончательная формула для свободной энергии имеет вид ряда:

$$\log\kappa(u) = \log a(u) + u + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda m}\operatorname{sh}2um}{m\operatorname{ch}\lambda m}$$
$$= \log b(u) + \lambda - u + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda m}\operatorname{sh}2(\lambda-u)m}{m\operatorname{ch}\lambda m}. \tag{27}$$

Отметим, что при общих значениях $v_F < \infty$ (при $|\Delta| < 1$) или $v_F < \frac{\pi}{2}$ (при $\Delta < -1$) уравнение (17) описывает основное состояние шестивершинной модели общего вида с, вообще говоря, различными a, a', b, b' (отличное от единицы отношение c/c' вообще не влияет на модель). Уравнение не имеет аналитического решения, но может быть решено численно. При этом два слагаемых под знаком максимума в свободной энергии будут различны.

Задачи

1. Выведите (4) и (5).

2. Докажите соотношения (10) индукцией по k.

3. Покажите, что анзац Бете (13) можно получить из формулы (12) для собственных значений и требования, что для любого собственного значения $\Lambda(u)$ произведение $\Lambda(u)\sin^N(\lambda - u)$ (при $|\Delta| < 1$) или $\Lambda(u)\,\mathrm{sh}^N(\lambda - u)$ (при $\Delta < -1$) было целой аналитической функцией u.

4. Введите переменную t, имеющую смысл $(T - T_c)/T_c$ вблизи критической точки $\Delta = -1$. Покажите, что вблизи этой точки свободная энергия регулярна в антисегнетоэлектрической области и имеет слабую сингулярность в неупорядоченной области:

$$f_{\mathrm{sing}} \sim e^{-c/t^{1/2}}$$

с некоторой константой c.