

## Лекция 8

### Спиновая цепочка Гайзенберга и ее скейлинговый предел

Рассмотрим цепочку из  $N$  спинов  $S = 1/2$ , то есть пространство

$$\mathcal{H}_N = \underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2}_N, \quad (1)$$

на котором действует гамильтониан

$$H_{XYZ} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (J_x \sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + J_y \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + J_z \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z). \quad (2)$$

Здесь  $\sigma_n^i$  действует на  $n$ -ю компоненту в  $\mathcal{H}_N$ , причем  $(N+1)$ -я компонента отождествляется с первой. Такая модель называется *XYZ-моделью Гайзенберга* с циклическими граничными условиями. В случае  $J_x = J_y$  модель называют *XXZ-моделью*, а в случае  $J_x = J_y = \pm J_z$  — *XXX-моделью*. Мы будем считать  $N$  четным числом.

Поскольку физика не зависит от общего множителя в гамильтониане, обычно вводят обозначения

$$\Gamma = J_y/J_x, \quad \Delta = J_z/J_x \quad (3)$$

При этом принимается, что

$$J_x > 0, \quad |\Gamma| \leq 1, \quad |\Delta| \leq |\Gamma| \quad \text{или} \quad |\Delta| \geq 1.$$

Без ограничения общности мы положим  $J_x = 1$ . Гамильтониан записывается в виде

$$H_{XYZ} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N ((1 + \Gamma)(\sigma_n^+ \sigma_{n+1}^- + \sigma_n^- \sigma_{n+1}^+) + (1 - \Gamma)(\sigma_n^+ \sigma_{n+1}^+ + \sigma_n^- \sigma_{n+1}^-) + \Delta \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z). \quad (4)$$

Здесь

$$\sigma^+ = \frac{\sigma^x + i\sigma^y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \frac{\sigma^x - i\sigma^y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

— операторы повышения и понижения спина.

Применим к этому гамильтониану преобразование Йордана–Вигнера:

$$\sigma_n^z = 2a_n^+ a_n - 1, \quad \sigma_n^+ = a_n^+ \exp\left(i\pi \sum_{j=1}^{n-1} a_j^+ a_j\right), \quad \sigma_n^- = a_n \exp\left(-i\pi \sum_{j=1}^{n-1} a_j^+ a_j\right), \quad (6)$$

где  $a_n, a_n^+$  — фермионные операторы:

$$a_m^+ a_n + a_n a_m^+ = \delta_{mn}, \quad a_m a_n + a_n a_m = a_m^+ a_n^+ + a_n^+ a_m^+ = 0.$$

Обратное преобразование имеет вид

$$a_n = \sigma_n^- \prod_{j=1}^{n-1} (-\sigma_j^z), \quad a_n^+ = \sigma_n^+ \prod_{j=1}^{n-1} (-\sigma_j^z). \quad (7)$$

Получаем

$$H_{XYZ} = -\sum_{n=1}^N \left( \frac{1 + \Gamma}{2} (a_{n+1}^+ a_n + a_n^+ a_{n+1}) + \frac{1 - \Gamma}{2} (a_n^+ a_{n+1}^+ - a_n a_{n+1}) + 2\Delta (a_n^+ a_n a_{n+1}^+ a_{n+1} - a_n^+ a_n) \right). \quad (8)$$

Рассмотрим сначала случай  $XY$ -модели, т. е. модели с  $\Delta = 0$ . В этом случае гамильтониан квадратичен по фермионам и легко диагонализуется. Положим

$$a_n = \frac{1}{N^{1/2}} \sum_k a_k e^{ikn}. \quad (9)$$

Тогда

$$H_{XY} = - \sum_k \left( (1 + \Gamma) \cos k \cdot a_k^+ a_k + i \frac{1 - \Gamma}{2} \sin k \cdot (a_k^+ a_{-k}^+ + a_k a_{-k}) \right). \quad (10)$$

Гамильтонианы такого вида диагонализуются с помощью преобразования Боголюбова. Для начала рассмотрим простой случай  $\Gamma = 1$ . Очевидно, зона Бриллюэна  $-\pi \leq k < \pi$  разбивается на две области: 1)  $-\frac{\pi}{2} \leq k < \frac{\pi}{2}$  и 2)  $-\pi \leq k < -\frac{\pi}{2}$  или  $\frac{\pi}{2} \leq k < \pi$ . Очевидно, энергии в первой области отрицательны и эта часть зоны будет полностью заполнена:  $k_F = \pi/2$ . По-другому, можно сказать так: основное состояние системы  $|0\rangle$  удовлетворяет соотношению  $a_k|0\rangle = 0$  во второй области и  $a_k^+|0\rangle = 0$  в первой области. Это диктует следующее преобразование Боголюбова:

$$b_k = a_{k-\pi}, \quad b_k^+ = a_{k-\pi}^+, \quad b'_k = ia_k^+, \quad b'_k{}^+ = -ia_k, \quad -\frac{\pi}{2} \leq k < \frac{\pi}{2}, \quad (11)$$

считая, что  $k$  определено по модулю  $2\pi$ . Множители  $\pm i$  введены произвольно, чтобы упростить дальнейшие формулы. Тогда гамильтониан примет вид

$$H_{XY} = \sum_{-\pi/2 \leq k < \pi/2} \cos k (b_k^+ b_k + b'_k{}^+ b'_k).$$

Операторы  $b_k^+$ ,  $b_k$  являются операторами рождения-уничтожения частиц, а  $b'_k{}^+$ ,  $b'_k$  — античастиц.

Построим преобразование Боголюбова в общем случае так, чтобы оно переходило в преобразование (11) в пределе  $\Gamma \rightarrow 1$ . Положим

$$a_k = \alpha'_k b'_k + \beta'_k b_{-k}^+, \quad a_k^+ = \beta_k{}^* b'_{-k} + \alpha_k{}^* b_k^+, \quad |\alpha'_k|^2 + |\beta'_k|^2 = 1, \quad \alpha'_k \beta'_{-k} + \alpha'_{-k} \beta'_k = 0. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (10), и требуя, чтобы члены, пропорциональные  $b'^+ b'^+$  и  $b' b'$  обратились в нуль, получаем

$$\alpha'_k = -\sin \frac{\kappa}{2}, \quad \beta'_k = i \cos \frac{\kappa}{2}, \quad \text{tg } \kappa = \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} \text{tg } k. \quad (13)$$

Это решение хорошо определено в первой половине,  $-\pi/2 < k < \pi/2$ , зоны Бриллюэна. Оставшуюся половину перенесем в эту же область, и заменой  $\kappa \rightarrow \kappa - \pi$  получим

$$\alpha_k = \cos \frac{\kappa}{2}, \quad \beta_k = i \sin \frac{\kappa}{2}. \quad (14)$$

Гамильтониан равен

$$H_{XY} = \sum_{-\pi/2 < k < \pi/2} \epsilon_k (b_k^+ b_k + b_k^+ b'_k), \quad \epsilon_k = \sqrt{(1 + \Gamma)^2 \cos^2 k + (1 - \Gamma)^2 \sin^2 k}. \quad (15)$$

В системе имеется массовая щель величины  $(1 - |\Gamma|)$ . В пределе  $\Gamma \rightarrow \pm 1$  массовая щель исчезает и система попадает в критическую точку, а вблизи критической точки можно осуществить скейлинговый предел  $a \rightarrow 0$  ( $a$  — параметр решетки) при соответствующем перемасштабировании остальных параметров.

Без ограничения общности можно ограничиться пределом  $\Gamma \rightarrow 1$ . Положим  $pa = \pi/2 - |k|$ . Тогда при  $|p|a \ll 1$  имеем

$$\epsilon(p) = 2a \sqrt{m^2 + p^2}, \quad m = \frac{1 - \Gamma}{2a}. \quad (16)$$

Гамильтониан  $H_{FF} = \frac{1}{2a} H_{XY}$  представляет собой гамильтониан свободных дираковских фермионов.

Рассмотрим преобразование Боголюбова вблизи точек  $\kappa = \pm\pi/2$ . Пусть, например  $k = \pi/2 - pa$ . Из (13) мы видим, что при  $\Gamma \rightarrow 1$  параметр  $\kappa$  определяется формулой

$$\text{ctg } \kappa = \frac{|p|}{m},$$

и преобразование Боголюбова тривиально всюду кроме области  $p \sim m$ . Нас, конечно, интересует область  $pa \ll 1$ , но при этом величина импульса  $p$  может быть и много больше массы  $m$ . В этой области  $\kappa = 0$  и преобразование принимает простой вид

$$\begin{aligned} a_{\pi/2-pa} &= ib'_{-\pi/2+pa}^+, & a_{\pi/2+pa} &= b_{-\pi/2+pa}, \\ a_{-\pi/2+pa} &= ib'_{\pi/2-pa}^+, & a_{-\pi/2-pa} &= b_{\pi/2-pa}, \end{aligned} \quad m \ll p \ll a^{-1}. \quad (17)$$

Теперь исследуем вклад взаимодействия  $\Delta \neq 0$  в скейлинговом пределе. Удобно стартовать со случая  $m = 0$  ( $\Gamma = 1$ ). Прежде всего, с помощью  $b_{\pm\pi/2+pa}$ ,  $b'_{\pm\pi/2+pa}$  надо ввести стандартные релятивистские фермионные операторы. В обозначениях лекции 6 вейлевские фермионы должны иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\psi_R(x)}{\sqrt{Na}} &= \int_0^\infty \frac{m_0^{1/2} dp}{2\pi\sqrt{2p}} (b_{-\pi/2+pa}\chi_\lambda(x) + b'_{-\pi/2+pa}^+\chi_{\lambda+i\pi}(x)) \Big|_{\substack{m_0 \rightarrow 0 \\ m_0 e^\lambda = 2p}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} (b_{-\pi/2+pa}e^{ipx} + ib'_{-\pi/2+pa}^+e^{-ipx}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} (a_{\pi/2+pa}e^{ipx} + a_{\pi/2-pa}e^{-ipx}), \\ \frac{\psi_L(x)}{\sqrt{Na}} &= \int_{-\infty}^0 \frac{m_0^{1/2} dp}{2\pi\sqrt{2|p|}} (b_{\pi/2+pa}\chi_\lambda(x) + b'_{\pi/2+pa}^+\chi_{\lambda+i\pi}(x)) \Big|_{\substack{m_0 \rightarrow 0 \\ m_0 e^{-\lambda} = 2|p|}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \int_{-\infty}^0 \frac{dp}{2\pi} (b_{\pi/2+pa}e^{ipx} + ib'_{\pi/2+pa}^+e^{-ipx}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \int_{-\infty}^0 \frac{dp}{2\pi} (a_{-\pi/2+pa}e^{ipx} + a_{-\pi/2-pa}e^{-ipx}), \end{aligned}$$

Полный дираковский фермион имеет вид

$$\psi(x) = \psi_R(x) + \psi_L(x) = \begin{pmatrix} \psi_-(x) \\ -i\psi_+(x) \end{pmatrix},$$

где

$$\psi_\pm(x) = \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi} a_\pm(p)e^{ipx} \quad a_\pm(p) = (Na)^{1/2} a_{\pm\pi/2+pa}, \quad (18)$$

записываются как обычные нерелятивистские фермионы через осцилляторы  $a_\pm(p)$ . Заметим, что исходные фермионы  $a_n$  выражаются через них как

$$a_n = a^{1/2}(i^n\psi_+(an) + i^{-n}\psi_-(an)).$$

Теперь перепишем гамильтониан в виде

$$H_\Delta \equiv \frac{1}{2a}(H_{XZX} + \Delta N/2 - 2\Delta M) = H_{FF} - \frac{\Delta}{Na} \sum_q \rho_q \rho_{-q} \cos q, \quad (19)$$

где

$$M = \rho_0 = \sum_n a_n^+ a_n = \sum_k a_k^+ a_k \quad (20)$$

— фермионное число, а

$$\rho_q = \sum_k a_{k+q}^+ a_{k'} = \sum_n a_n^+ a_n e^{iqn} \quad (21)$$

— фурье-образ соответствующего тока. Фермионное число, строго говоря, сохраняется точно только в точке  $\Gamma = 1$ . Но оно также сохраняется в скейлинговом пределе, так что вычитание его из гамильтониана в этом пределе ничего не меняет. Основной вклад во взаимодействие будет вносить область

наименьших энергий вблизи точек  $k = \pm\pi/2$ . Поэтому будут иметь значение  $\rho_q$  с параметром  $q$  в окрестности точек 0 и  $\pi$ . Запишем  $\rho_q$  в виде

$$\rho_{pa} = \rho_{++}(p) + \rho_{--}(p), \quad \rho_{\pi+pa} = \rho_{+-}(p) + \rho_{-+}(p), \quad \rho_{\alpha\beta}(p) = \int \frac{dp'}{2\pi} a_\alpha^+(p'+p)a_\beta(p'). \quad (22)$$

Подставляя в (19), получим

$$H_\Delta = H_{FF} - \Delta \int \frac{dp}{2\pi} (\rho_{++}(p) + \rho_{--}(p))(\rho_{++}(-p) + \rho_{--}(-p)) \\ + \Delta \int \frac{dp}{2\pi} (\rho_{+-}(p) + \rho_{-+}(p))(\rho_{+-}(-p) + \rho_{-+}(-p)).$$

Переходя к координатному представлению, получаем

$$H_\Delta = H_{FF} - \Delta \int dx ((\psi_+^+ \psi_+)^2 + (\psi_-^+ \psi_-)^2 + 2\psi_+^+ \psi_+ \psi_-^+ \psi_- - \psi_-^+ \psi_+ \psi_+^+ \psi_- - \psi_+^+ \psi_- \psi_-^+ \psi_+) \\ = H_{FF} - 4\Delta \int dx \psi_+^+ \psi_+ \psi_-^+ \psi_-. \quad (23)$$

Здесь мы использовали коммутационные соотношения  $\psi_\alpha^+(x)\psi_\beta(x) + \psi_\beta(x)\psi_\alpha^+(x) = a^{-1}\delta_{\alpha\beta}$ . В частности,  $(\psi_\alpha^+ \psi_{-\alpha})^2 = (\psi_\alpha^+)^2 \psi_{-\alpha}^2 = 0$ .

Сравнивая (23) с формулами для модели Тирринга, заключаем, что

$$g = -2\Delta \quad (\Delta \ll 1). \quad (24)$$

Понятно, что эта формула верна только при малых  $\Delta$ . Достаточно вспомнить, что массовый член  $\bar{\psi}\psi$  в модели Тирринга не имеет размерности массы, так что скейлинговый закон (16) заведомо не выполняется при  $\Delta \neq 0$ .

При выводе этих формул я немного обманул вас. Дело в том, что произведение  $\psi_\alpha^+ \psi_\alpha$  содержит регулярный вклад. Действительно, если мы бозонизуем фермионы с помощью конструкции из лекции 2 при  $g \rightarrow 0$ , мы получим

$$\psi_+^+(z')\psi_+(z) = \frac{i}{2\pi} \left( \frac{1}{z' - z} - i\partial\varphi(z) + O(z' - z) \right), \\ \psi_-^+(z')\psi_-(z) = -\frac{i}{2\pi} \left( \frac{1}{\bar{z}' - \bar{z}} - i\bar{\partial}\varphi(\bar{z}) + O(\bar{z}' - \bar{z}) \right).$$

Это приводит к тому, что члены  $(\psi_\alpha^+ \psi_\alpha)^2$  дают вклады в гамильтониан, пропорциональные  $(\partial_x \phi)^2$ , что приводит к перенормировке пространственной компоненты импульса [1].

Можно ли установить точную связь между параметром  $g$  модели Тирринга и параметром  $\Delta$  XYZ-модели? Это возможно, поскольку XYZ-модель допускает точное решение [2]. К сожалению, это решение очень сложно, и я не могу его здесь привести. Из решения можно извлечь корреляционную длину  $r_c$ , которая при  $\Gamma \rightarrow 1$  пропорциональна

$$r_c \sim \left( \frac{1 - \Delta^2}{1 - \Gamma} \right)^{1/(2-2\mu/\pi)}, \quad \Delta = -\cos \mu. \quad (25)$$

Вспоминая, что  $1 - \Gamma$  пропорциональна затравочной массе  $m_0$  в модели Тирринга, а  $m_0 \sim m^{2-\beta^2}$ , где  $m$  — масса физических возбуждений, получаем

$$\beta^2 = \frac{2\mu}{\pi}, \quad \frac{g}{\pi} = \frac{\pi/2 - \mu}{\mu}. \quad (26)$$

При  $\Delta \rightarrow 0$  ( $\mu \rightarrow \pi/2$ ) воспроизводится (24).

Теперь попробуем сопоставить операторам на решетке операторы в теории поля. Для этого удобнее пользоваться моделью синус-Гордона. Вспомним, что в гауссовой модели (соответствующей XXZ-случаю) имеется симметрия

$$\varphi \rightarrow \varphi + \alpha,$$

где  $\alpha$  — произвольная константа. В модели синус-Гордона эта симметрия нарушается и  $\alpha$  должно быть целым кратным  $2\pi/\beta$ :

$$\alpha = \frac{2\pi n}{\beta}. \quad (27)$$

В XXZ-модели тоже имеется непрерывная симметрия

$$\sigma^\pm \rightarrow e^{\pm i\lambda} \sigma^\pm, \quad \sigma^z \rightarrow \sigma^z.$$

Эта симметрия отвечает сохранению  $z$ -проекции полного спина

$$S^z = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sigma_n^z = M - \frac{N}{2}. \quad (28)$$

При  $\Gamma < 1$  член, пропорциональный

$$\sum_n (\sigma_n^+ \sigma_{n+1}^+ + \sigma_n^- \sigma_{n+1}^-)$$

и отвечающий массовому члену в модели Тирринга, то есть косинусу в модели синус-Гордона, нарушает эту симметрию до

$$\lambda = \pi n. \quad (29)$$

Сравнивая (27) с (29), заключаем, что

$$\alpha = \frac{2\lambda}{\beta} \quad (30)$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_n^\pm \sigma_{n+1}^\pm \sim a^{\beta^2} e^{\pm i\beta\phi}.$$

Поскольку оператор  $\sigma_n^\pm$  коммутирует с оператором  $\sigma_{m+1}^\pm$  ( $n \neq m, m+1$ ), то соответствующий оператор в теории поля должен быть ему взаимно-локален. Естественно предположить, что

$$\sigma_n^\pm \sim a^{\beta^2/4} e^{\pm i\frac{\beta}{2}\phi}.$$

Общие допустимые экспоненциальные операторы в теории имеют вид

$$V_{m,n}(x) = \exp\left(im\frac{\beta}{2}\phi + in\frac{1}{2\beta}\tilde{\phi}\right), \quad m, n \in \mathbb{Z}. \quad (31)$$

В частности, оператор  $\sigma_n^z$  пропорционален линейной комбинации  $a\partial_t\phi$  и  $(-1)^n a^{1/\beta^2} (V_{0,2} - V_{0,-2})$ . Очень подробно связь между решеточными и теоретико-полевыми переменными описана в работе [3].

Решение XXZ-модели см. в следующей лекции.

## Литература

- [1] A. Luther and I. Peschel, Phys. Rev. B12 (1975) 3908; A. Luther, Phys. Rev. B14 (1976) 2153.
- [2] Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, М. «Мир», 1985.
- [3] S. Lukyanov and V. Terras, Nucl. Phys. B654 (2003) 323 [arXiv:hep-th/0206093].

## Задачи

1. Выведите (8).
2. XY-цепочка в магнитном поле. Найдите спектр гамильтониана

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \Gamma \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + 2h\sigma_n^z).$$

Найдите критические значения внешнего поля  $h$  в зависимости от  $\Gamma$ , при которых исчезает щель в спектре.

3. Покажите, что все операторы (31) взаимно-локальны, либо взаимно полулокальны, то есть любое произведение  $V_{m_1 n_1}(x_1) V_{m_2 n_2}(x_2)$  не меняется при обходе  $x_2$  вокруг  $x_1$  в комплексной плоскости, либо умножается на  $-1$ .