Лекция 5
$O(N)$-модель: $1/N$-разложение

Рассмотрим общую $O(N)$-модель в пространстве Минковского:

$$S[\boldsymbol{n}] = \frac{1}{2g}\int d^2x\,(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2, \qquad \boldsymbol{n}^2 = 1. \tag{1}$$

Удобно ввести вспомогательное поле $\omega(x)$ и написать действие в виде

$$S[\boldsymbol{n},\omega] = \frac{1}{2g}\int d^2x\,((\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 - \omega(\boldsymbol{n}^2 - 1)), \tag{2}$$

где вектор $\boldsymbol{n}$ теперь пробегает любые значения в $\mathbb{R}^N$. Рассмотрим функциональный интеграл

$$Z[J] = \int D\omega\, D\boldsymbol{n}\, e^{iS[\boldsymbol{n},\omega] + ig^{-1/2}\int d^2x\,\boldsymbol{J}\boldsymbol{n}}. \tag{3}$$

Интеграл по $\boldsymbol{n}$ — гауссов. Возьмем его. Заметим, что

$$iS[\boldsymbol{n},\omega] + ig^{-1/2}\int d^2x\,\boldsymbol{J}\boldsymbol{n} = -\frac{1}{2}\left(\frac{n_i}{g^{1/2}}, K(\omega)\delta_{ij}\frac{n_j}{g^{1/2}}\right) + \left(iJ_i, \frac{n_i}{g^{1/2}}\right) + i\int d^2x\,\frac{\omega}{2g},$$

где

$$K(\omega) = i(\partial_\mu^2 + \omega).$$

Отсюда получаем

$$Z[J] = \int D\omega\,(\det(\partial_\mu^2 + \omega))^{-N/2} \exp\left(i\int d^2x\,\frac{\omega}{2g} - \frac{1}{2}\int d^2x\,d^2x'\,J_i(x)G(x,x'|\omega)J_i(x')\right),$$

где $G(x,x'|\omega)$ — решение уравнения

$$i(\partial_\mu^2 + \omega(x))G(x,x'|\omega) = \delta(x - x'). \tag{4}$$

По-другому производящий функционал можно переписать в виде

$$Z[J] = \int D\omega\,\exp\left(iS_{\text{eff}}[\omega] - \frac{1}{2}\int d^2x\,d^2x'\,J_i(x)G(x,x'|\omega)J_i(x')\right), \tag{5}$$

$$S_{\text{eff}}[\omega] = i\frac{N}{2}\operatorname{tr}\log(\partial_\mu^2 + \omega) + \int d^2x\,\frac{\omega}{2g}. \tag{6}$$

Найдем точку перевала этого интеграла при $N \to \infty$. Предположим, что точке перевала отвечает

$$\omega(x) = \text{const} = \omega_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\log(\partial_\mu^2 + \omega_0) &= V\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\log(\omega_0 - k^2 - i0) \\
&= iV\int_E \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\log(\omega_0 + k^2) \\
&= \frac{iV}{2\pi}\int_0^\Lambda dk\,k\log(\omega_0 + k^2) = \frac{iV}{4\pi}\int_{\omega_0}^{\omega_0+\Lambda^2} du\,\log u = \frac{iV}{4\pi}\left[u\log\frac{u}{e}\right]_{\omega_0}^{\omega_0+\Lambda^2} \\
&= \frac{iV}{4\pi}\left((\omega_0 + \Lambda^2)\log\frac{\Lambda^2}{e} - \omega_0\log\frac{\omega_0}{e}\right) = \frac{iV}{4\pi}\left(\omega_0\log\frac{\Lambda^2}{\omega_0} + \Lambda^2\log\frac{\Lambda^2}{e}\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

где Λ — параметр ультрафиолетового обрезания. Под знаком логарифма мы пренебрегли ω_0 в выражении $\omega_0 + \Lambda^2$. Находим

$$0 = \frac{dS[\omega_0]}{d\omega_0} = V\left(-\frac{N}{8\pi}\log\frac{\Lambda^2}{\omega_0} + \frac{1}{2g}\right).$$

Отсюда получаем

$$\omega_0 = m^2 = \Lambda^2 \exp\left(-\frac{4\pi}{Ng}\right). \tag{8}$$

Мы видим, что в пределе $\Lambda \to \infty$ следует устремить к нулю g таким образом, чтобы величина $\omega_0 = m^2$ оставалась конечной. Для бета-функции при больших N находим

$$\frac{dg}{d\log\Lambda} = \beta(g) = -\frac{N}{2\pi} g^2. \tag{9}$$

Важно, что в теории возникает параметр m размерности массы. Мы сейчас увидим, что это действительно масса. В теории имеет место *динамическая генерация массы*. Ни на каких масштабах корреляционные функции не будут спадать степенным образом, и наличие размерного параметра будет заметно в корреляционных функциях на любых масштабах.

Давайте теперь разовьем теорию возмущений по параметру $1/N$. Представим $\omega(x)$ в виде

$$\omega(x) = m^2 + (2/N)^{1/2} \rho(x). \tag{10}$$

и разложим эффективное действие по степеням $N^{-1/2}\rho(x)$:

$$\begin{aligned}
S_{\text{eff}}[\omega] &= \text{const } + i\frac{N}{2}\operatorname{tr}\log\left(1 + (2/N)^{1/2}\rho(\partial_\mu^2 + m^2)^{-1}\right) + \frac{1}{(2N)^{1/2}g}\operatorname{tr}\rho \\
&= \text{const } + i\frac{N}{2}\operatorname{tr}\log(1 + i(2/N)^{1/2}\rho G) + \frac{1}{(2N)^{1/2}g}\operatorname{tr}\rho \\
&= \text{const } + \left(\frac{1}{(2N)^{1/2}g}\operatorname{tr}\rho - \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2}\operatorname{tr}\rho G\right) - i\frac{N}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-i)^n(2/N)^{n/2}}{n}\operatorname{tr}(\rho G)^n.
\end{aligned}$$

Здесь G — оператор с ядром $G(x,x') = G(x,x'|m^2)$.

Скобка в последнем выражении равна нулю по предположению, что $\omega = m^2$ является минимумом. Давайте проверим это предположение. Имеем

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\rho &= \int d^2x\,\rho(x), \\
\operatorname{tr}\rho G &= \int d^2x\,\rho(x)G(x,x) = G(0,0)\int d^2x\,\rho(x) = G(0,0)\operatorname{tr}\rho \\
&= V\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{i}{k^2 - m^2 + i0}\operatorname{tr}\rho = \frac{V}{4\pi}\log\frac{\Lambda^2}{m^2}\operatorname{tr}\rho = (gN)^{-1}\operatorname{tr}\rho.
\end{aligned}$$

Мы видим, что скобка в самом деле обращается в ноль. Исследуя следующий вклад ($n = 2$), можно убедиться, что точка $\omega = m^2$ является локальным минимумом. Пока нет способа доказать строго, что этот минимум является абсолютным.

Окончательно имеем

$$S_{\text{eff}}[\omega] = \text{const } - i\frac{N}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-i)^n(2/N)^{n/2}}{n}\int d^{2n}x\,\rho(x_1)G(x_1,x_2)\ldots\rho(x_n)G(x_n,x_1). \tag{11}$$

Разложение начинается с квадратичного члена вида

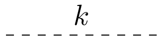
$$\frac{i}{2}\int d^2x_1\,d^2x_2\,\rho(x_1)G(x_1,x_2)\rho(x_2)G(x_2,x_1).$$

Поэтому пропагатор $D(x_1,x_2)$ поля $\rho(x)$ есть ядро оператора, обратного к оператору с ядром

$$D^{-1}(x_1,x_2) = G(x_1,x_2)G(x_2,x_1).$$

Теперь ясно, для чего понадобился множитель $(2/N)^{1/2}$ перед ρ. Он позволил избавиться от коэффициента $2/N$ в пропагаторе $D(x_1,x_2)$.

Переходя к импульсному представлению, получим

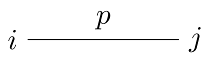
$D(k) =$ 

$$= -\left(\int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{(q^2-m^2+i0)((q+k)^2-m^2+i0)}\right)^{-1}. \tag{12}$$

Кроме того, оператор $G(x,x'|\omega)$, входящий в (5), тоже следует разложить по $\rho(x)$:

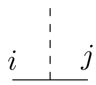
$$G[\omega] = \frac{1}{G^{-1}+i(2/N)^{1/2}\rho} = \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\left(\tfrac{2}{N}\right)^{n/2}G(\rho G)^n,$$
$$G(x_1,x_2|\omega) = \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\left(\frac{2}{N}\right)^{n/2}\int d^{2n}y\,G(x_1,y_1)\rho(y_1)G(y_1,y_2)\ldots\rho(y_n)G(y_n,x_2).$$

Изобразим $G(x_1,x_2)$ сплошной линией:

$G_{ij}(p) =$ 

$$= G(p)\delta_{ij} = \frac{i\delta_{ij}}{p^2-m^2+i0}. \tag{13}$$

Если еще ввести вершину



$$= -i\left(\frac{2}{N}\right)^{1/2}\delta_{ij}, \tag{14}$$

можно сформулировать следующие правила диаграммной техники:

1. Диаграмма состоит из пунктирных линий (12), сплошных линий (13) и вершин (14).
2. Внешними линиями диаграммы могут быть только сплошные линии, отвечающие массивным частицам $\varphi_i = g^{-1/2}n_i$.
3. Замкнутые петли сплошных линий должны содержать не менее трех вершин.

Мы видим, что в такой формулировке диаграммная техника вообще не содержит константы связи g. Порядок диаграммы по $1/N$ равен $\frac{1}{2}V-L$, где V — число вершин, а L — число петель из сплошных линий. Из правила 3 следует, что порядок диаграммы всегда положителен.

Связь между константой связи g, массой m и параметром обрезания Λ можно уточнять с помощью соотношения

$$\left\langle \sum_{i=1}^{N}\varphi_i^2(x)\right\rangle = \frac{1}{g}.$$

Например в порядке $1/N$ можно получить

$$m^2 = \Lambda^2\exp\left(-\frac{4\pi}{(N-2)g'}\right), \qquad \frac{1}{g'} = \frac{1}{g} + \frac{\Lambda^2}{4\pi m^2\log(\Lambda^2/m^2)}. \tag{15}$$

Добавка к обратной константе связи представляет собой вклад специфической для сигма-модели квадратичной расходимости. Расходимость становится логарифмической, если мы добавляем в действие (2) член вида $\alpha\int d^2x\,\omega^2$, «размывающий» дельта-функцию в функциональном интеграле.

Давайте теперь попробуем вычислить S-матрицу $O(N)$-модели. Разберемся сначала с кинематикой. У нас имеется N частиц массы m. Пусть две такие частицы с импульсами p_1 и p_2 рассеиваются друг на друге, образуя две новые частицы той же массы с импульсами p_1' и p_2'. Импульсы p_a удобно параметризовать быстротами θ_a:

$$p_a = m\,\mathrm{sh}\,\theta_a, \qquad p_a' = m\,\mathrm{sh}\,\theta_a'.$$

Тогда

$$m\,\mathrm{ch}\,\theta_1 + m\,\mathrm{ch}\,\theta_2 = m\,\mathrm{ch}\,\theta_1' + m\,\mathrm{ch}\,\theta_2',$$
$$m\,\mathrm{sh}\,\theta_1 + m\,\mathrm{sh}\,\theta_2 = m\,\mathrm{sh}\,\theta_1' + m\,\mathrm{sh}\,\theta_2'.$$

Эти уравнения имеют ровно два решения: $\theta_1' = \theta_1$, $\theta_2' = \theta_2$ и $\theta_1' = \theta_2$, $\theta_2' = \theta_1$. Матрицу рассеяния двух частиц в две можно представить в виде

$$S_{ij}^{i'j'}(\theta_1,\theta_2;\theta_1',\theta_2') = (2\pi)^2\delta(p_1'-p_1)\delta(p_2'-p_2)S_{ij}^{i'j'}(\theta_1-\theta_2) + (2\pi)^2\delta(p_2'-p_1)\delta(p_1'-p_2)S_{ij}^{j'i'}(\theta_1-\theta_2).$$

Чтобы правильно нормировать, нужно преобразовать дельта-функции к стандартному виду дельта-функции по пространственно-временным импульсам:

$$\begin{aligned}S_{ij}^{i'j'}(\theta_1,\theta_2;\theta_1',\theta_2') &= (2\pi)^2\delta^{(2)}(P'-P)\frac{\operatorname{sh}(\theta_1-\theta_2)}{\operatorname{ch}\theta_1\operatorname{ch}\theta_2}S_{ij}^{i'j'}(\theta_1-\theta_2)\\ &= (2\pi)^2\delta^{(2)}(P'-P)\frac{4m^2\operatorname{sh}(\theta_1-\theta_2)}{4\varepsilon_1\varepsilon_2}S_{ij}^{i'j'}(\theta_1-\theta_2),\end{aligned}$$

где $P^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$, $P'^\mu = p_1'^\mu + p_2'^\mu$. Следовательно, в стандартных обозначениях

$$S_{ij}^{i'j'}(\theta_1-\theta_2) = \delta_i^{i'}\delta_j^{j'} + \frac{M_{ij}^{i'j'}(\theta_1-\theta_2)}{4m^2\operatorname{sh}(\theta_1-\theta_2)},$$

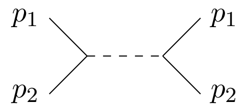
где амплитуды M_{ij} вычисляются по правилам Фейнмана.

Условие совместимости с $O(N)$-симметрией дает

$$S_{ij}^{i'j'}(\theta) = \delta_{i'j'}\delta_{ij}S_1(\theta) + \delta_{i'i}\delta_{j'j}S_2(\theta) + \delta_{j'i}\delta_{i'j}S_3(\theta). \tag{16}$$

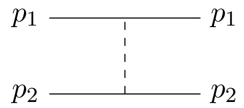
В порядке $1/N$ матричные элементы даются следующими диаграммами:

$$4m^2\operatorname{sh}\theta\,S_1(\theta) =$$



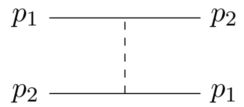
,

$$4m^2\operatorname{sh}\theta\,(S_2(\theta)-1) =$$



,

$$4m^2\operatorname{sh}\theta\,S_3(\theta) =$$



.

Для вычисления этих диаграмм нам понадобится явная формула для $D(k)$. Она имеет вид

$$D^{-1}(k) = \frac{i}{2\pi k^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4m^2}{k^2}}}\log\frac{\sqrt{1-\frac{4m^2}{k^2}}+1}{\sqrt{1-\frac{4m^2}{k^2}}-1}. \tag{17}$$

Эта громоздкая формула становится вполне элементарной в параметризации

$$k^2 = -4m^2\operatorname{sh}^2\frac{\theta}{2}. \tag{18}$$

Отметим, что угол θ в этой параметризации совпадает с $\theta_1-\theta_2$ в случае диаграммы для S_3. Имеем

$$D(k) = 4\pi i m^2\,\frac{\operatorname{sh}\theta}{\theta}. \tag{19}$$

Подставляя эти выражения в диаграммы, получаем

$$\begin{aligned}S_1(\theta) &= -\frac{2\pi i}{N(i\pi-\theta)},\\ S_2(\theta) &= 1-\frac{2\pi i}{N\operatorname{sh}\theta},\\ S_3(\theta) &= -\frac{2\pi i}{N\theta}.\end{aligned} \tag{20}$$

Литература

[1] A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov, *Annals Phys.* **120** (1979) 253.

[2] А. М. Поляков, Калибровочные поля и струны.

[3] А. М. Цвелик, Квантовая теория поля в физике конденсированного состояния.

Задачи

1. Получите формулу (17).

2. Модель Гросса—Невё для N-компонентного майорановского (т. е. вещественного в представлении с чисто мнимыми γ-матрицами) ферми-поля определяется действием

$$S[\psi] = \int d^2x \, \left(\frac{i}{2} \bar{\psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_i + \frac{g}{8} (\bar{\psi}_i \psi_i)^2 \right)$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование; в представлении с чисто мнимыми гамма-матрицами $\bar{\psi} = \psi^T \gamma^0$).

Покажите, что эта модель эквивалентна модели со вспомогательным бозонным полем

$$S[\psi, \omega] = \int d^2x \, \left(\frac{1}{2} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - \omega(x)) \psi_i - \frac{\omega^2(x)}{2g} \right).$$

Покажите, что в модели имеет место динамическая генерация массы

$$\omega_0 = m = \Lambda \exp\left(-\frac{2\pi}{Ng} \right).$$

3. Постройте диаграммную технику для $1/N$-разложения в модели Гросса—Невё. Найдите S-матрицу в древесном приближении.