Лекция 4
$O(3)$-модель: генерация массы инстантонами

Рассмотрим $O(3)$-модель:

$$S[\boldsymbol{n}] = \frac{1}{2g}\int d^2x\,(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2, \qquad n_1^2+n_2^2+n_3^2=1. \tag{1}$$

Мы будем интересоваться функциями $\boldsymbol{n}(x)$ в эвклидовом пространстве-времени, на которых действие конечно. В квантовой механике эти функции будут иметь конечную амплитуду $e^{-S[\boldsymbol{n}]}$. Из конечности действия следует, что решение должно стремиться к константе на бесконечности:

$$\boldsymbol{n}(x) \underset{x\to\infty}{\to} \boldsymbol{n}_0. \tag{2}$$

Таким образом, бесконечность можно рассматривать как точку на двумерной сфере S^2. Непрерывная функция $\boldsymbol{n}(x)$, удовлетворяющая условию (2), осуществляет непрерывное отображение

$$\boldsymbol{n} : S^2 \to S^2. \tag{3}$$

Такие отображения классифицируются *топологическим числом* q, таким что $\boldsymbol{n}$ осуществляет $|q|$-листное накрытие сферы сферой. Если $q>0$, отображение сохраняет ориентацию, а если $q<0$, меняет ее. Представителем класса q является, например, отображение:

$$\theta' = \theta, \qquad \varphi' = q\varphi, \tag{4}$$

где (θ,φ) — полярные координаты на сфере.

Выразим топологическое число через поле $\boldsymbol{n}$. Будем считать его отображением сферы S^2 на сферу $S^{2\prime}$. Зададим на сфере S^2 координаты $x=(x^1,x^2)$, а на сфере $S^{2\prime}$ координаты $x'=(x'^1,x'^2)$ и метрику $g'_{\mu\nu}$. Метрика на сфере S^2 несущественна. Пусть

$$S = \int_{S^{2\prime}} d^2x'\sqrt{g'}$$

— площадь сферы $S^{2\prime}$. Тогда топологическое число можно выразить через площадь, заметаемую отображением $x'(x)$, когда x заметает всю сферу S^2:

$$q = \frac{1}{S}\int_{x'(S^2)} d^2x'\,\sqrt{g'} = \frac{1}{S}\int_{S^2} d^2x \frac{\partial(x')}{\partial(x)}\sqrt{g'}.$$

В сферических координатах

$$q = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta\,\frac{\partial(\theta',\varphi')}{\partial(\theta,\varphi)}\sin\theta' = \frac{1}{4\pi}\int d^2x\,\frac{\partial(\theta',\varphi')}{\partial(x^1,x^2)}\sin\theta'.$$

Чтобы найти якобиан $\partial(\theta',\varphi')/\partial(x^1,x^2) = (\partial\theta'/\partial x^1)(\partial\varphi'/\partial x^2) - (\partial\theta'/\partial x^2)(\partial\varphi'/\partial x^1)$, перепишем сферические переменные через $\boldsymbol{n}$. Положим

$$\boldsymbol{n} = (\sin\theta'\cos\varphi', \sin\theta'\sin\varphi', \cos\theta'). \tag{5}$$

Можно проверить прямым вычислением, что

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{n}\,(\partial_\mu\boldsymbol{n}\times\partial_\nu\boldsymbol{n})\epsilon^{\mu\nu} = \frac{\partial(\theta',\varphi')}{\partial(x^1,x^2)}\sin\theta'. \tag{6}$$

Отсюда получаем

$$q = \frac{1}{8\pi}\int d^2x\,\boldsymbol{n}\,(\partial_\mu\boldsymbol{n}\times\partial_\nu\boldsymbol{n})\epsilon^{\mu\nu}. \tag{7}$$

Можно вывести (7) еще проще. Вектор $\partial_1\boldsymbol{n}\,dx^1$ представляет собой маленький вектор перемещения на сфере, отвечающий перемещению на $(dx^1,0)$ в x-пространстве. Аналогично $\partial_2\boldsymbol{n}\,dx^2$ представляет

собой вектор пенемещения на сфере, отвечающий перемещению на $(0, dx^2)$. Оба вектора перпендикулярны вектору $\boldsymbol{n}$. Тогда $|\partial_1\boldsymbol{n} \times \partial_2\boldsymbol{n}\, dx^1\, dx^2| = \pm\boldsymbol{n}\,(\partial_1\boldsymbol{n} \times \partial_2\boldsymbol{n})\, d^2x$ есть площадь маленького параллелограмма на сфере. Знак «+» отвечает отображению, сохраняющему ориентацию, а знак «−» — отображению, меняющему ориентацию. Следовательно,

$$\int d^2x\, \boldsymbol{n}\,(\partial_1\boldsymbol{n} \times \partial_2\boldsymbol{n}) = \frac{1}{2}\int d^2x\, \boldsymbol{n}\,(\partial_\mu\boldsymbol{n} \times \partial_\nu\boldsymbol{n})\epsilon^{\mu\nu}$$

равно площади на сфере, заметаемой при интегрировании по всему x-пространству, равной $4\pi q$.

Из тождества

$$\int d^2x\,(\partial_\mu\boldsymbol{n} + \epsilon_{\mu\nu}\boldsymbol{n} \times \partial^\nu\boldsymbol{n})^2 = 2\int d^2x\,(\partial_\mu\boldsymbol{n})^2 - 2\int d^2x\, \boldsymbol{n}\,(\partial_\mu\boldsymbol{n} \times \partial_\nu\boldsymbol{n})\epsilon^{\mu\nu} \tag{8}$$

получаем

$$S[\boldsymbol{n}] = \frac{4\pi q}{g} + \frac{1}{4g}\int d^2x\,(\partial_\mu\boldsymbol{n} + \epsilon_{\mu\nu}\boldsymbol{n} \times \partial^\nu\boldsymbol{n})^2. \tag{9}$$

Заменой $\boldsymbol{n} \to -\boldsymbol{n}$, $q \to -q$ получим

$$S[\boldsymbol{n}] = -\frac{4\pi q}{g} + \frac{1}{4g}\int d^2x\,(\partial_\mu\boldsymbol{n} - \epsilon_{\mu\nu}\boldsymbol{n} \times \partial^\nu\boldsymbol{n})^2. \tag{10}$$

Отсюда, очевидно, следует, что

$$S[\boldsymbol{n}] \geq \frac{4\pi|q|}{g}. \tag{11}$$

Неравенство (11) превращается в равенство на решениях уравнения первого порядка (*уравнения самодуальности*)

$$\partial_\mu\boldsymbol{n} = -\epsilon_{\mu\nu}\boldsymbol{n} \times \partial^\nu\boldsymbol{n} \qquad (q \geq 0), \tag{12}$$

$$\partial_\mu\boldsymbol{n} = \epsilon_{\mu\nu}\boldsymbol{n} \times \partial^\nu\boldsymbol{n} \qquad (q \leq 0). \tag{13}$$

Решения этих уравнений минимизируют действие, поэтому составляют подкласс решений уравнений движения. Чтобы явно решить уравнения самодуальности, используем стереографическую проекцию на плоскость. При этом удобно использовать комплексную координату w на этой плоскости:

$$n_1 + in_2 = \frac{2w}{1+|w|^2}, \qquad n_3 = \frac{1-|w|^2}{1+|w|^2}. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (12), (13), получим

$$\bar\partial w = 0 \qquad (q \geq 0), \tag{15}$$

$$\partial w = 0 \qquad (q \leq 0). \tag{16}$$

Рассмотрим случай $q > 0$. Функция $w(z)$ должна быть мероморфной функцией на сфере, то есть единственными особенностями этой функции, включая особенность в бесконечности, могут быть только полюсы. Количество нулей и полюсов такой функции должно быть конечно. Нулям отвечает точка $\boldsymbol{n} = (0, 0, 1)$, а полюсам $\boldsymbol{n} = (0, 0, -1)$. Самое общее такое решение (15) имеет вид

$$w(q, \vec a, \vec b, c; z) = c\prod_{j=1}^{q}\frac{z - a_j}{z - b_j}, \tag{17}$$

где $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a_j, b_j \in \mathbb{C}$, $a_i \neq b_j$ $(\forall i, j)$. Кроме того, следует включить предельные случаи $a_i \to \infty$, $ca_i = \text{const}$ и $b_i \to \infty$, $c/b_i = \text{const}$, но такие случаи имеют меру нуль. Легко найти топологическое число, соответствующее решению (17). Пусть $w_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Тогда число решений уравнения $w(z) = w_0$ с учетом кратностей не зависит от w_0. Положим w_0 равным, например, бесконечности. Тогда очевидно, что число решений этого уравнения равно q. Это значит, что $w(z)$ осуществляет q-листное накрытие и топологическое число равно q.

Аналогично, в случае топологического числа $q < 0$ получаем

$$w(q, \vec{a}, \vec{b}, c; \bar{z}) = c \prod_{j=1}^{-q} \frac{\bar{z} - a_j}{\bar{z} - b_j}, \tag{18}$$

Решения (17) и (18) называются *(много)инстантонными решениями.*

Попробуем использовать инстантонные решения, чтобы приближенно вычислить функциональный интеграл для квантовой $O(3)$-модели. Мы будем интегрировать по многоинстантонным решениям и малым флуктуациям вблизи них.

Перепишем (9) и (10) через поле $w(z, \bar{z})$:

$$S[w, \bar{w}] = \frac{4\pi q}{g} + \frac{8}{g} \int d^2x \, \frac{\bar{\partial} w \partial \bar{w}}{(1 + |w|^2)^2} \tag{19}$$

$$= -\frac{4\pi q}{g} + \frac{8}{g} \int d^2x \, \frac{\partial w \bar{\partial} \bar{w}}{(1 + |w|^2)^2}. \tag{20}$$

Рассмотрим случай $q \geq 0$. Пусть

$$S_q[\varphi, \bar{\varphi}] = S[w(q, \vec{a}, \vec{b}, c; z)(1 + g^{1/2}\varphi(z, \bar{z})), w^*(q, \vec{a}, \vec{b}, c; z)(1 + g^{1/2}\bar{\varphi}(z, \bar{z}))]. \tag{21}$$

Легко видеть, что в квадратичном приближении

$$S_q[\varphi, \bar{\varphi}] = \frac{4\pi q}{g} + 8 \int d^2x \, \frac{|w|^2}{(1 + |w|^2)^2} \bar{\partial}\varphi \partial \bar{\varphi}. \tag{22}$$

Соответственно, q-инстантонный вклад в статсумму имеет вид

$$Z_q = \frac{e^{-4\pi q/g}}{(q!)^2} \int d\mu(\vec{a}, \vec{b}, c) \, Z[w(q, \vec{a}, \vec{b}, c; z)], \qquad Z[w] = \int D\varphi \, D\bar{\varphi} \, \exp\left(-8 \int d^2x \, \frac{|w|^2}{(1 + |w|^2)^2} \bar{\partial}\varphi \partial \bar{\varphi} \right). \tag{23}$$

Здесь $d\mu(\vec{a}, \vec{b}, c)$ — мера интегрирования по $\vec{a}$, $\vec{b}$ и c, инвариантная относительно сдвигов, растяжений и инверсии. Такую меру легко найти:

$$d\mu(\vec{a}, \vec{b}, c) = k^q \frac{d^2c}{|c|^2} \prod_{j=1}^{q} d^2a_j \, d^2b_j \prod_{i<j} |a_i - a_j|^4 |b_i - b_j|^4 \prod_{i,j} |a_i - b_j|^{-4} \tag{24}$$

с некоторой константой k.

Очевидно, интеграл $Z[w]$ не зависит от константы связи g. Из-за вклада ультрафиолетового и инфракрасного обрезаний этот интеграл не будет буквально инвариантен относительно конформных преобразований параметров a_j, b_j. Он будет преобразовываться по правилу:

$$Z[w] \to Z[w'] \prod_{j=1}^{q} \left| \frac{da'_j}{da_j} \right|^{2\alpha} \left| \frac{db'_j}{db_j} \right|^{2\alpha}$$

с некоторым α. Отсюда следует, что

$$Z[w] \sim f(c) \prod_{i<j} |a_i - a_j|^{-4\alpha} |b_i - b_j|^{-4\alpha} \prod_{i,j} |a_i - b_j|^{4\alpha}.$$

Некоторыми достаточно сложными вычислениями можно показать, что $\alpha = 1/2$ и $f(c) = |c|^2/(1+|c|^2)^2$, так что интеграл по c дает просто конечный множитель. Если это принять, то получится [1]

$$Z_q \sim \frac{\lambda^q}{(q!)^2} \int \prod_{j=1}^{q} d^2a_j \, d^2b_j \prod_{i<j} |a_i - a_j|^2 |b_i - b_j|^2 \prod_{i,j} |a_i - b_j|^{-2}, \tag{25}$$

где $\lambda \sim e^{-4\pi/g}$.

Легко проверить, что это плазма, описываемая моделью синус-Гордона с $\beta^2 = 1$ или моделью Тирринга с $g = 0$, то есть свободным массивным фермионом. Это значит, что инстантоны в модели генерируют массу. Подробные вычисления выполнены в работе [2].

Дефект приведенных рассуждений состоит в том, что мы учитывали только инстантонные решения. Мы можем, конечно, учесть и антиинстантонные решения. Однако реалистичное описание модели может быть только при использовании флуктуаций вблизи функций, содержащих как инстантоны, так и антиинстантоны. К сожалению, такое описание пока отсутствует.

Имеется одно важное следствие существования топологического числа (7). Дело в том, что действие $O(3)$-модели можно модифицировать:

$$S_\theta(\boldsymbol{n}) = S(\boldsymbol{n}) + i\theta q = \frac{1}{2g}\int d^2x\,(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 + i\frac{\theta}{8\pi}\int d^2x\,\boldsymbol{n}(\partial_\mu \boldsymbol{n}\times\partial_\nu \boldsymbol{n})\epsilon^{\mu\nu}. \tag{26}$$

Последний член называют θ-*членом*. Физические свойства модели существенно зависят от θ, так как статсумма (и производящий функционал) записываются в виде

$$Z = \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{i\theta q} Z_q.$$

В частности, известно, что при $\theta = \pi$ $O(3)$-модель безмассова, но не масштабно-инвариантна.

Литература

[1] А. А. Белавин, А. М. Поляков, *Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика*, Письма в ЖЭТФ 22 (1975) 503–506

[2] V. A. Fateev, I. V. Frolov, A. S. Shvarts, *Quantum Fluctuations of Instantons in the Nonlinear Sigma Model*, Nucl. Phys. B154 (1979) 1–20

[Обе статьи имеются в сборнике «Инстантоны, струны и конформная теория поля», под ред. А. А. Белавина, 2002].

Задачи

1. С помощью подстановки (5) получите (6).

2. Выведите тождество (8).

3. Покажите эквивалентность уравнений (15), (16) уравнениям (12), (13).

4. Выразите топологический заряд q через функцию $w(z,\bar z)$ в виде двумерного интеграла.

5*. Пусть $\boldsymbol{n}(x) = (n_1(x),\ldots,n_N(x))$ — *комплексные* скалярные поля на плоскости, удовлетворяющие условию

$$|\boldsymbol{n}(x)|^2 \equiv \sum_{i=1}^{N} |n_i(x)|^2 = 1,$$

а $A_\mu(x)$ — вещественное (ко)векторное поле. Рассмотрим действие

$$S[\boldsymbol{n}, A] = \frac{1}{2g}\int d^2x\,\overline{D_\mu \boldsymbol{n}}\cdot D_\mu \boldsymbol{n}, \qquad D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu.$$

Покажите, что величина

$$q = \frac{1}{2\pi}\int d^2x\,\epsilon_{\mu\nu}\,\partial_\mu A_\nu$$

является целым топологическим зарядом, причем в каждом топологическом секторе

$$S \geq \frac{\pi}{g}|q|.$$

Найдите уравнения самодуальности.