

Лекция 4

O(3)-модель: генерация массы инстантонами

Рассмотрим O(3)-модель:

$$S[\mathbf{n}] = \frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n})^2, \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \quad (1)$$

Мы будем интересоваться функциями $\mathbf{n}(x)$ в евклидовом пространстве-времени, на которых действие конечно. В квантовой механике эти функции будут иметь конечную амплитуду $e^{-S[\mathbf{n}]}$. Из конечности действия следует, что решение должно стремиться к константе на бесконечности:

$$\mathbf{n}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \mathbf{n}_0. \quad (2)$$

Таким образом, бесконечность можно рассматривать как точку на двумерной сфере S^2 . Непрерывная функция $\mathbf{n}(x)$, удовлетворяющая условию (2), осуществляет непрерывное отображение

$$\mathbf{n} : S^2 \rightarrow S^2. \quad (3)$$

Такие отображения классифицируются *топологическим числом* q , таким что \mathbf{n} осуществляет $|q|$ -листное накрытие сферы сферой. Если $q > 0$, отображение сохраняет ориентацию, а если $q < 0$, меняет ее. Представителем класса q является, например, отображение:

$$\theta' = \theta, \quad \varphi' = q\varphi, \quad (4)$$

где (θ, φ) — полярные координаты на сфере.

Выразим топологическое число через поле \mathbf{n} . Будем считать его отображением сферы S^2 на сферу $S^{2'}$. Зададим на сфере S^2 координаты $x = (x^1, x^2)$, а на сфере $S^{2'}$ координаты $x' = (x'^1, x'^2)$ и метрику $g'_{\mu\nu}$. Метрика на сфере S^2 несущественна. Пусть

$$S = \int_{S^{2'}} d^2x' \sqrt{g'}$$

— площадь сферы $S^{2'}$. Тогда топологическое число можно выразить через площадь, заметаемую отображением $x'(x)$, когда x заметает всю сферу S^2 :

$$q = \frac{1}{S} \int_{x'(S^2)} d^2x' \sqrt{g'} = \frac{1}{S} \int_{S^2} d^2x \frac{\partial(x')}{\partial(x)} \sqrt{g'}.$$

В сферических координатах

$$q = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \frac{\partial(\theta', \varphi')}{\partial(\theta, \varphi)} \sin \theta' = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \frac{\partial(\theta', \varphi')}{\partial(x^1, x^2)} \sin \theta'.$$

Чтобы найти якобиан $\partial(\theta', \varphi')/\partial(x^1, x^2) = (\partial\theta'/\partial x^1)(\partial\varphi'/\partial x^2) - (\partial\theta'/\partial x^2)(\partial\varphi'/\partial x^1)$, перепишем сферические переменные через \mathbf{n} . Положим

$$\mathbf{n} = (\sin \theta' \cos \varphi', \sin \theta' \sin \varphi', \cos \theta'). \quad (5)$$

Можно проверить прямым вычислением, что

$$\frac{1}{2} \mathbf{n} (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}) \epsilon^{\mu\nu} = \frac{\partial(\theta', \varphi')}{\partial(x^1, x^2)} \sin \theta'. \quad (6)$$

Отсюда получаем

$$q = \frac{1}{8\pi} \int d^2x \mathbf{n} (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}) \epsilon^{\mu\nu}. \quad (7)$$

Можно вывести (7) еще проще. Вектор $\partial_1 \mathbf{n} dx^1$ представляет собой маленький вектор перемещения на сфере, отвечающий перемещению на $(dx^1, 0)$ в x -пространстве. Аналогично $\partial_2 \mathbf{n} dx^2$ представляет

собой вектор перемещения на сфере, отвечающий перемещению на $(0, dx^2)$. Оба вектора перпендикулярны вектору \mathbf{n} . Тогда $|\partial_1 \mathbf{n} \times \partial_2 \mathbf{n} dx^1 dx^2| = \pm \mathbf{n} (\partial_1 \mathbf{n} \times \partial_2 \mathbf{n}) d^2 x$ есть площадь маленького параллелограмма на сфере. Знак «+» отвечает отображению, сохраняющему ориентацию, а знак «-» — отображению, меняющему ориентацию. Следовательно,

$$\int d^2 x \mathbf{n} (\partial_1 \mathbf{n} \times \partial_2 \mathbf{n}) = \frac{1}{2} \int d^2 x \mathbf{n} (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}) \epsilon^{\mu\nu}$$

равно площади на сфере, заметаемой при интегрировании по всему x -пространству, равной $4\pi q$.

Из тождества

$$\int d^2 x (\partial_\mu \mathbf{n} + \epsilon_{\mu\nu} \mathbf{n} \times \partial^\nu \mathbf{n})^2 = 2 \int d^2 x (\partial_\mu \mathbf{n})^2 - 2 \int d^2 x \mathbf{n} (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}) \epsilon^{\mu\nu} \quad (8)$$

получаем

$$S[\mathbf{n}] = \frac{4\pi q}{g} + \frac{1}{4g} \int d^2 x (\partial_\mu \mathbf{n} + \epsilon_{\mu\nu} \mathbf{n} \times \partial^\nu \mathbf{n})^2. \quad (9)$$

Заменой $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$, $q \rightarrow -q$ получим

$$S[\mathbf{n}] = -\frac{4\pi q}{g} + \frac{1}{4g} \int d^2 x (\partial_\mu \mathbf{n} - \epsilon_{\mu\nu} \mathbf{n} \times \partial^\nu \mathbf{n})^2. \quad (10)$$

Отсюда, очевидно, следует, что

$$S[\mathbf{n}] \geq \frac{4\pi|q|}{g}. \quad (11)$$

Неравенство (11) превращается в равенство на решениях уравнения первого порядка (*уравнения самодуальности*)

$$\partial_\mu \mathbf{n} = -\epsilon_{\mu\nu} \mathbf{n} \times \partial^\nu \mathbf{n} \quad (q \geq 0), \quad (12)$$

$$\partial_\mu \mathbf{n} = \epsilon_{\mu\nu} \mathbf{n} \times \partial^\nu \mathbf{n} \quad (q \leq 0). \quad (13)$$

Решения этих уравнений минимизируют действие, поэтому составляют подкласс решений уравнений движения. Чтобы явно решить уравнения самодуальности, используем стереографическую проекцию на плоскость. При этом удобно использовать комплексную координату w на этой плоскости:

$$n_1 + in_2 = \frac{2w}{1 + |w|^2}, \quad n_3 = \frac{1 - |w|^2}{1 + |w|^2}. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (12), (13), получим

$$\bar{\partial} w = 0 \quad (q \geq 0), \quad (15)$$

$$\partial w = 0 \quad (q \leq 0). \quad (16)$$

Рассмотрим случай $q > 0$. Функция $w(z)$ должна быть мероморфной функцией на сфере, то есть единственными особенностями этой функции, включая особенность в бесконечности, могут быть только полюсы. Количество нулей и полюсов такой функции должно быть конечно. Нулям отвечает точка $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, а полюсам $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$. Самое общее такое решение (15) имеет вид

$$w(q, \vec{a}, \vec{b}, c; z) = c \prod_{j=1}^q \frac{z - a_j}{z - b_j}, \quad (17)$$

где $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a_j, b_j \in \mathbb{C}$, $a_i \neq b_j$ ($\forall i, j$). Кроме того, следует включить предельные случаи $a_i \rightarrow \infty$, $ca_i = \text{const}$ и $b_i \rightarrow \infty$, $c/b_i = \text{const}$, но такие случаи имеют меру нуль. Легко найти топологическое число, соответствующее решению (17). Пусть $w_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Тогда число решений уравнения $w(z) = w_0$ с учетом кратностей не зависит от w_0 . Положим w_0 равным, например, бесконечности. Тогда очевидно, что число решений этого уравнения равно q . Это значит, что $w(z)$ осуществляет q -листное накрытие и топологическое число равно q .

Аналогично, в случае топологического числа $q < 0$ получаем

$$w(q, \vec{a}, \vec{b}, c; \bar{z}) = c \prod_{j=1}^{-q} \frac{\bar{z} - a_j}{\bar{z} - b_j}, \quad (18)$$

Решения (17) и (18) называются *(много)инстантонными решениями*.

Попробуем использовать инстантонные решения, чтобы приближенно вычислить функциональный интеграл для квантовой $O(3)$ -модели. Мы будем интегрировать по многоинстантонным решениям и малым флуктуациям вблизи них.

Перепишем (9) и (10) через поле $w(z, \bar{z})$:

$$S[w, \bar{w}] = \frac{4\pi q}{g} + \frac{8}{g} \int d^2x \frac{\bar{\partial}w \partial \bar{w}}{(1 + |w|^2)^2} \quad (19)$$

$$= -\frac{4\pi q}{g} + \frac{8}{g} \int d^2x \frac{\partial w \bar{\partial} \bar{w}}{(1 + |w|^2)^2}. \quad (20)$$

Рассмотрим случай $q \geq 0$. Пусть

$$S_q[\varphi, \bar{\varphi}] = S[w(q, \vec{a}, \vec{b}, c; z)(1 + g^{1/2}\varphi(z, \bar{z})), w^*(q, \vec{a}, \vec{b}, c; z)(1 + g^{1/2}\bar{\varphi}(z, \bar{z}))]. \quad (21)$$

Легко видеть, что в квадратичном приближении

$$S_q[\varphi, \bar{\varphi}] = \frac{4\pi q}{g} + 8 \int d^2x \frac{|w|^2}{(1 + |w|^2)^2} \bar{\partial}\varphi \partial \bar{\varphi}. \quad (22)$$

Соответственно, q -инстантонный вклад в статсумму имеет вид

$$Z_q = \frac{e^{-4\pi q/g}}{(q!)^2} \int d\mu(\vec{a}, \vec{b}, c) Z[w(q, \vec{a}, \vec{b}, c; z)], \quad Z[w] = \int D\varphi D\bar{\varphi} \exp\left(-8 \int d^2x \frac{|w|^2}{(1 + |w|^2)^2} \bar{\partial}\varphi \partial \bar{\varphi}\right). \quad (23)$$

Здесь $d\mu(\vec{a}, \vec{b}, c)$ — мера интегрирования по \vec{a} , \vec{b} и c , инвариантная относительно сдвигов, растяжений и инверсии. Такую меру легко найти:

$$d\mu(\vec{a}, \vec{b}, c) = k^q \frac{d^2c}{|c|^2} \prod_{j=1}^q d^2a_j d^2b_j \prod_{i<j} |a_i - a_j|^4 |b_i - b_j|^4 \prod_{i,j} |a_i - b_j|^{-4} \quad (24)$$

с некоторой константой k .

Очевидно, интеграл $Z[w]$ не зависит от константы связи g . Из-за вклада ультрафиолетового и инфракрасного обрезаний этот интеграл не будет буквально инвариантен относительно конформных преобразований параметров a_j , b_j . Он будет преобразовываться по правилу:

$$Z[w] \rightarrow Z[w'] \prod_{j=1}^q \left| \frac{da'_j}{da_j} \right|^{2\alpha} \left| \frac{db'_j}{db_j} \right|^{2\alpha}$$

с некоторым α . Отсюда следует, что

$$Z[w] \sim f(c) \prod_{i<j} |a_i - a_j|^{-4\alpha} |b_i - b_j|^{-4\alpha} \prod_{i,j} |a_i - b_j|^{4\alpha}.$$

Некоторыми достаточно сложными вычислениями можно показать, что $\alpha = 1/2$ и $f(c) = |c|^2/(1 + |c|^2)^2$, так что интеграл по c дает просто конечный множитель. Если это принять, то получится [1]

$$Z_q \sim \frac{\lambda^q}{(q!)^2} \int \prod_{j=1}^q d^2a_j d^2b_j \prod_{i<j} |a_i - a_j|^2 |b_i - b_j|^2 \prod_{i,j} |a_i - b_j|^{-2}, \quad (25)$$

где $\lambda \sim e^{-4\pi/g}$.

Легко проверить, что это плазма, описываемая моделью синус-Гордона с $\beta^2 = 1$ или моделью Тирринга с $g = 0$, то есть свободным массивным фермионом. Это значит, что инстантоны в модели генерируют массу. Подробные вычисления выполнены в работе [2].

Дефект приведенных рассуждений состоит в том, что мы учитывали только инстантонные решения. Мы можем, конечно, учесть и антиинстантонные решения. Однако реалистичное описание модели может быть только при использовании флуктуаций вблизи функций, содержащих как инстантоны, так и антиинстантоны. К сожалению, такое описание пока отсутствует.

Имеется одно важное следствие существования топологического числа (7). Дело в том, что действие $O(3)$ -модели можно модифицировать:

$$S_\theta(\mathbf{n}) = S(\mathbf{n}) + i\theta q = \frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n})^2 + i \frac{\theta}{8\pi} \int d^2x \mathbf{n} (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}) \epsilon^{\mu\nu}. \quad (26)$$

Последний член называют θ -членом. Физические свойства модели существенно зависят от θ , так как статесумма (и производящий функционал) записываются в виде

$$Z = \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{i\theta q} Z_q.$$

В частности, известно, что при $\theta = \pi$ $O(3)$ -модель безмассова, но не масштабно-инвариантна.

Литература

- [1] А. А. Белавин, А. М. Поляков, *Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика*, Письма в ЖЭТФ 22 (1975) 503–506
- [2] V. A. Fateev, I. V. Frolov, A. S. Shvarts, *Quantum Fluctuations of Instantons in the Nonlinear Sigma Model*, Nucl. Phys. B154 (1979) 1–20

[Обе статьи имеются в сборнике «Инстантоны, струны и конформная теория поля», под ред. А. А. Белавина, 2002].

Задачи

1. С помощью подстановки (5) получите (6).
2. Выведите тождество (8).
3. Покажите эквивалентность уравнений (15), (16) уравнениям (12), (13).
4. Выразите топологический заряд q через функцию $w(z, \bar{z})$ в виде двумерного интеграла.
- 5*. Пусть $\mathbf{n}(x) = (n_1(x), \dots, n_N(x))$ — комплексные скалярные поля на плоскости, удовлетворяющие условию

$$|\mathbf{n}(x)|^2 \equiv \sum_{i=1}^N |n_i(x)|^2 = 1,$$

а $A_\mu(x)$ — вещественное (ко)векторное поле. Рассмотрим действие

$$S[\mathbf{n}, A] = \frac{1}{2g} \int d^2x \overline{D_\mu \mathbf{n}} \cdot D_\mu \mathbf{n}, \quad D_\mu = \partial_\mu + A_\mu.$$

Покажите, что величина

$$q = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu$$

является целым топологическим зарядом, причем в каждом топологическом секторе

$$S \geq \frac{\pi}{g} |q|.$$

Найдите уравнения самодуальности.