

Лекция 1

O(2)-модель и переход Березинского—Костерлица—Таулеса

В этих лекциях мы часто будем рассматривать модели в двумерном пространстве-времени с действием

$$S[\mathbf{n}] = \frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n})^2, \quad \mathbf{n}^2 \equiv \sum_{i=1}^N n_i^2 = 1, \quad (1)$$

которые называются моделями \mathbf{n} -поля или $O(N)$ -моделями. Эти модели обладают явной $O(N)$ -симметрией, соответствующей вращениям сферы. Они принадлежат широкому классу сигма-моделей, то есть моделей, у которых поля лежат на многообразиях.

Сейчас мы рассмотрим простейшую модель из этой серии — $O(2)$ -модель. Она элементарно линеаризуется. Положим

$$n_1 = \cos \varphi, \quad n_2 = \sin \varphi.$$

Тогда

$$S[\varphi] = \frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \varphi)^2, \quad (2)$$

$$\varphi(x) \sim \varphi(x) + 2\pi. \quad (3)$$

Последняя строчка означает, что мы считаем значения поля φ и $\varphi + 2\pi$ эквивалентными.

Казалось бы, мы имеем безмассовое поле с корреляционными функциями совместных с (3) операторов, спадающими степенным образом:

$$\langle e^{im\varphi(x')} e^{in\varphi(x)} \rangle \sim (-(x' - x)^2)^{\frac{g}{4\pi}mn}, \quad m, n \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

На самом деле это совсем не так и результат существенно зависит от значения константы g . Чтобы в этом убедиться, рассмотрим классические решения уравнений поля

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (5)$$

в евклидовом пространстве. Оно допускает решения вида

$$\varphi_{\vec{q}\vec{x}}(x) = \sum_{a=1}^n q_a \operatorname{Im} \log(z - z_a) = \sum_{a=1}^n \frac{q_a}{2i} \log \frac{z - z_a}{\bar{z} - \bar{z}_a}, \quad q_a \in \mathbb{Z}, \quad (6)$$

где

$$z = x^1 + ix^2 = x^1 - x^0, \\ \bar{z} = x^1 - ix^2 = x^1 + x^0.$$

Эти решения, хотя и имеют сингулярности (неопределенные значения) в точках $z = z_a$, очень важны. Они представляют собой решения с n вихрями в точках z_a с завихренностями q_a . В простейшем случае $n = 1$ в радиальных координатах $z - z_1 = r e^{i\theta}$ решение имеет вид

$$\varphi_{q_1 x_1}(x) = q_1 \theta.$$

Важно отметить, что решения (6) удовлетворяют уравнению (5) даже в точках $x = x_a$. Действительно,

$$\partial_\mu \partial^\mu \frac{1}{2i} \log \frac{z}{\bar{z}} = \partial_\mu \partial^\mu \operatorname{arctg} \frac{x^2}{x^1} = -\epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu \frac{x^\nu}{r^2} = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \log \frac{1}{r}.$$

Тогда для любой гладкой, ограниченной и достаточно быстро спадающей функции $\varphi(x)$ мы имеем

$$\int d^2x \varphi(x) \partial_\mu \partial^\mu \frac{1}{2i} \log \frac{z}{\bar{z}} = \int d^2x (\epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \varphi(x)) \log \frac{1}{r} = 0,$$

так как интеграл от логарифма в точке $x = 0$ сходится. Отсюда немедленно получаем

$$\int d^2x \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi_{\vec{q}\vec{x}} = 0. \quad (7)$$

Вычислим значение действия на вихревых решениях (6):

$$\begin{aligned} S[\varphi_{\bar{q}\bar{x}}] &= \frac{2}{g} \int d^2x \partial\varphi_{\bar{q}\bar{x}} \bar{\partial}\varphi_{\bar{q}\bar{x}} = \frac{1}{2g} \int d^2x \sum_{a,b} \frac{q_a q_b}{(z - z_a)(\bar{z} - \bar{z}_b)} \\ &= \frac{1}{2g} \left(\sum_a q_a^2 \int \frac{d^2x}{|z - z_a|^2} + \sum_{a < b} q_a q_b \int d^2x \frac{(z - z_a)(\bar{z} - \bar{z}_b) + (\bar{z} - \bar{z}_a)(z - z_b)}{|z - z_a|^2 |z - z_b|^2} \right). \end{aligned}$$

Первый интеграл берется просто, но расходится и на больших и на малых масштабах:

$$\int \frac{d^2x}{|z - z_a|^2} \simeq 2\pi \int_{r_0}^R \frac{dr}{r} = 2\pi \log \frac{R}{r_0},$$

где R и r_0 — параметры инфракрасного и ультрафиолетового обрезания соответственно. Второй интеграл расходится только на больших масштабах. Имеем

$$\int d^2x \frac{(z - z_a)(\bar{z} - \bar{z}_b) + (\bar{z} - \bar{z}_a)(z - z_b)}{|z - z_a|^2 |z - z_b|^2} = 2\pi \log \frac{R^2}{|z_a - z_b|^2}.$$

Подставляя эти формулы в интеграл для действия, получим

$$S[\varphi_{\bar{q}\bar{x}}] = \frac{1}{2g} \left(\pi \sum_a q_a^2 \log \frac{R^2}{r_0^2} + 2\pi \sum_{a < b} q_a q_b \log \frac{R^2}{|z_a - z_b|^2} \right) \quad (8)$$

$$= \frac{\pi}{2g} \left(\sum_a q_a \right)^2 \log R^2 - \frac{\pi}{2g} \sum_a q_a^2 \log r_0^2 + \frac{1}{2g} \sum_{a < b} q_a q_b 2\pi \log \frac{1}{|z_a - z_b|^2}. \quad (9)$$

Первый член стремится к бесконечности с ростом размера системы, если выражение в скобках не равно нулю. Это значит, что в большой системе должно выполняться условие нейтральности

$$\sum_a q_a = 0. \quad (10)$$

Второе слагаемое в (9) ультрафиолетово расходится. Если мы регуляризуем теорию каким-либо естественным способом, например, рассмотрим ее как предел теории с действием

$$S[\phi] = \int d^2x \left(|\partial_\mu \phi|^2 - \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - \phi_0^2)^2 \right),$$

это слагаемое будет конечным и будет зависеть от структуры кора вихрей. Ниже мы увидим, что значение r_0 не влияет существенно на результат.

Давайте теперь попробуем написать (эвклидов) функциональный интеграл в виде

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^{-2n}}{n!} \sum_{\substack{q_1, \dots, q_n \\ q_1 + \dots + q_n = 0}} \int d^2x_1 \cdots d^2x_n \int D\varphi e^{-S[\varphi + \varphi_{\bar{q}\bar{x}}] - (J, \varphi + \varphi_{\bar{q}\bar{x}})}, \quad (11)$$

где интеграл берется теперь по регулярным полям φ без всякого отождествления. Множитель $1/n!$ происходит от того, что решение (9) не меняется при перестановках $z_a \leftrightarrow z_b$, $q_a \leftrightarrow q_b$. Таким образом, суммирование $\sum_{q_1, \dots, q_n} \int d^2x_1 \cdots d^2x_n$ учитывает одни и те же конфигурации $n!$ раз. Множитель r_0^{-2n} добавлен для того, чтобы сделать интеграл безразмерным. Можно себе представить, что вихри могут занимать не любые позиции, а располагаются в ячейках размера $\sim r_0$.

Вычислим действие на фоне многовихревого решения:

$$S[\varphi + \varphi_{\bar{q}\bar{x}}] = S[\varphi_{\bar{q}\bar{x}}] + S[\varphi] + \frac{1}{g} \int d^2x \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi_{\bar{q}\bar{x}}.$$

Первый член дается выражением (9). Интеграл в последнем члене равен нулю в силу (7). Отсюда

$$Z[J] = Z_0[J] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{q_1, \dots, q_n \\ q_1 + \dots + q_n = 0}} r_0^{\frac{\pi}{g} \sum q_a^2 - 2n} \int d^2x_1 \cdots d^2x_n \prod_{a < b} |z_a - z_b|^{\frac{2\pi}{g} q_a q_b} e^{-(J, \varphi_{\bar{q}\bar{x}})}, \quad (12)$$

$$Z_0[J] = \int D\varphi e^{-S[\varphi] - (J, \varphi)}. \quad (13)$$

Из отождествления (3) следует, что мы можем рассматривать только источники J вида

$$J_{J\vec{y}}(x) = -i \sum_{j=1}^k J_j \delta(x - y_j), \quad J_i \in \mathbb{Z}. \quad (14)$$

Тогда

$$\begin{aligned} Z[J_{J\vec{y}}] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{q_1, \dots, q_n \\ q_1 + \dots + q_n = 0}} r_0^{\frac{\pi}{g} \sum_a q_a^2 - \frac{g}{4\pi} \sum_j J_j^2 - 2n} \int d^2x_1 \cdots d^2x_n \prod_{a < b} |z_a - z_b|^{\frac{2\pi}{g} q_a q_b} \\ &\times \prod_{a, j} \left(\frac{w_j - z_a}{w_j + \bar{z}_a} \right)^{q_a J_j / 2} \prod_{j < j'} |w_j - w_{j'}|^{\frac{g}{2\pi} J_j J_{j'}}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $w_j = y_j^1 + iy_j^2$.

Мы получили нечто вроде статистической суммы плазмы, частицы которой могут иметь любые заряды (причем энергия заряженного состояния пропорциональна квадрату заряда). Источник частиц φ сложно связан с частицами плазмы, однако, в принципе, можно ожидать, что при малых константах связи g («низкие температуры») плазма рекомбинирует и корреляционные функции остаются степенными, в то время как при больших g («высокой температуре») имеется дебаевское экранирование, корреляционные функции спадают экспоненциально и теория массивна. Такой переход по константе связи называется *переходом Березинского–Костерлица–Таулеса (БКТ)*.

Естественно, что мы не можем просуммировать весь ряд по теории возмущений. Тем не менее, можно точно определить точку перехода БКТ. Действительно, плазма не образуется, когда вихри удерживаются в конечном объеме, то есть все интегралы, кроме одного, инфракрасно сходятся при больших n . Кроме того, в силу условия нейтральности

$$\sum_{a < b} q_a q_b = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} q_a q_b = \frac{1}{2} \left(\sum_a q_a \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_a q_a^2 = -\frac{1}{2} \sum_a q_a^2 \leq -\frac{n}{2}.$$

Отсюда находим, что все интегралы сходятся при

$$2\frac{\pi}{g} \left(-\frac{n}{2} \right) + 2(n-1) < 0.$$

При больших n получаем, что безмассовой фазе отвечают $g < g_{\text{ВКТ}}$, причем

$$g_{\text{ВКТ}} = \frac{\pi}{2}. \quad (16)$$

При $g > g_{\text{ВКТ}}$ вихри не удерживаются и система ведет себя как плазма с конечной корреляционной длиной. Следует отметить, что ответ не зависит от параметра ультрафиолетового обрезания r_0 , так что фазовый переход имеет место при сколь угодно малом r_0 . Заметим, что условие (16) как раз является условием, при котором исчезает размерный множитель $r_0^{\frac{\pi}{g} \sum_a q_a^2 - 2n}$ для системы простых вихрей $q = \pm 1$. Поскольку в теории нет никаких размерных параметров, кроме r_0 , корреляционная длина пропорциональна r_0 , и, таким образом, даже у «идеальной» $O(2)$ -модели нет никаких шансов избежать фазового перехода. Качественно это можно объяснить тем, что малый статистический вес вихревых состояний с лихвой перекрывается большим объемом фазового пространства.

Выражение (15) можно переписать по-другому, введя новое поле $\phi(x)$. Обратим внимание, что

$$\nabla^2 \frac{1}{4\pi} \log |x|^2 = \delta(x). \quad (17)$$

и потому $\log \frac{R^2}{|x|^2}$ представляет собой пропагатор свободного безмассового бозонного поля:

$$S_0[\phi] = \frac{1}{8\pi} \int d^2x (\partial_\mu \phi)^2. \quad (18)$$

Поскольку уравнения движения в этой модели имеют вид

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0,$$

можно ввести дуальное поле $\tilde{\phi}$ условием

$$\partial_\mu \tilde{\phi} = \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi, \quad \epsilon_{01} = -\epsilon_{10} = 1, \quad (19m)$$

в пространстве Минковского или

$$\partial_\mu \tilde{\phi} = -i\epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi, \quad \epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1, \quad (19e)$$

в эвклидовом пространстве или

$$\partial \tilde{\phi} = \partial \phi, \quad \bar{\partial} \tilde{\phi} = -\bar{\partial} \phi. \quad (20)$$

Хотя эти формулы имеют буквальный смысл лишь на решениях уравнений движения, легко показать, что и на корреляционных функциях эти равенства не лишены смысла. Действительно, введем поля $\phi_R(z)$ и $\phi_L(\bar{z})$ уравнениями

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_R(z) + \phi_L(\bar{z}), \\ \tilde{\phi}(x) &= \phi_R(z) - \phi_L(\bar{z}). \end{aligned} \quad (21)$$

Тогда корреляционные функции

$$\langle \phi_R(z) \phi_R(z') \rangle_0 = \log \frac{R}{z - z'}, \quad \langle \phi_L(\bar{z}) \phi_L(\bar{z}') \rangle_0 = \log \frac{R}{\bar{z} - \bar{z}'}, \quad \langle \phi_R(z) \phi_L(\bar{z}') \rangle_0 = 0 \quad (22)$$

согласованы с теорией.

Далее нам понадобятся корреляционные функции экспоненциальных операторов. Поскольку эти корреляционные функции содержат бесконечные множители, мы попросту исключим их, определив перенормированные экспоненциальные операторы:

$$e^{i\alpha\phi_{R,L}} = r_0^{\alpha^2/2} :e^{i\alpha\phi_{R,L}}:, \quad e^{i\alpha\phi} = r_0^{\alpha^2} :e^{i\alpha\phi}:, \quad e^{\beta\tilde{\phi}} = r_0^{-\beta^2} :e^{\beta\tilde{\phi}}:. \quad (23)$$

Тогда экспоненциальные операторы $:e^{(\dots)}:$ уже не безразмерные и имеют размерности $d = \alpha^2/2$, α^2 и $-\beta^2$ соответственно. Эти размерности совпадают с *масштабными размерностями* операторов. По определению, мы говорим, что имеется набор операторов O_i с масштабными размерностями d_i , если его корреляционные функции инвариантны по отношению к заменам

$$O_i(x) \rightarrow s^{d_i} O_i(sx)$$

во всех операторах одновременно.

Корреляционные функции операторных экспонент в такой модели равны

$$\begin{aligned} \langle :e^{i\alpha_1\phi_R(z_1)}: \dots :e^{i\alpha_n\phi_R(z_n)}: \rangle_0 &= R^{-\frac{1}{2}(\sum_a \alpha_a)^2} \prod_{a<b} (z_a - z_b)^{\alpha_a\alpha_b}, \\ \langle :e^{i\alpha_1\phi_L(\bar{z}_1)}: \dots :e^{i\alpha_n\phi_L(\bar{z}_n)}: \rangle_0 &= R^{-\frac{1}{2}(\sum_a \alpha_a)^2} \prod_{a<b} (\bar{z}_a - \bar{z}_b)^{\alpha_a\alpha_b}. \end{aligned} \quad (24)$$

Более подробно перенормировка изложена в конце лекции в Пояснении. В пределе $R \rightarrow \infty$ правые части не обращаются в нуль при условии

$$\sum_{a=1}^n \alpha_a = 0. \quad (25)$$

Итак, имеем

$$\begin{aligned} &\left\langle \prod_{j=1}^k e^{i\beta_j \tilde{\phi}(y_j)} \prod_{a=1}^n e^{i\alpha_a \phi(x_a)} \right\rangle_0 \\ &= r_0^{\frac{\pi}{g} \sum_a q_a^2 + \frac{g}{4\pi} \sum_j J_j^2} \prod_{a<b} |z_a - z_b|^{2\alpha_a\alpha_b} \prod_{j<j'} |w_j - w_{j'}|^{2\beta_a\beta_b} \prod_{a,j} \left(\frac{w_j - z_a}{\bar{w}_j - \bar{z}_a} \right)^{\alpha_a\beta_j} \times \begin{cases} 1, & \sum \alpha_a = 0; \\ 0 & \text{в пр. сл.} \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

Это выражение в точности совпадает с подынтегральным выражением в (15) при

$$\alpha_a = \sqrt{\frac{\pi}{g}} q_a, \quad \beta_j = \sqrt{\frac{g}{4\pi}} J_j. \quad (27)$$

Отсюда получаем

$$Z[J_{\vec{y}}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{q_1, \dots, q_n \\ q_1 + \dots + q_n = 0}} r_0^{-2n} \int d^2 x_1 \cdots d^2 x_n \left\langle \prod_{j=1}^k e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}} J_j \tilde{\phi}(y_j)} \prod_{a=1}^n e^{i\sqrt{\frac{\pi}{g}} q_a \phi(x_a)} \right\rangle_0. \quad (28)$$

Заметим, что выражение под знаком интеграла замечательным образом симметрично относительно замен

$$g \leftrightarrow (2\pi)^2 g^{-1}, \quad k \leftrightarrow n, \quad q_a \leftrightarrow J_j, \quad \phi(x) \leftrightarrow \tilde{\phi}(x).$$

Более того, лагранжиан свободного поля пишется одинаково через поля ϕ и $\tilde{\phi}$. Поэтому мы можем отождествить

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{g}{4\pi}} \tilde{\phi}(x). \quad (29)$$

Сделаем важное приближение, не меняющее свойств фазового перехода. Будем пренебрегать вихрями с $|q| > 1$, поскольку их вклад падает с уменьшением r_0 быстрее вклада $|q|$ штук вихрей заряда 1. Тогда производящий функционал можно переписать в виде

$$\begin{aligned} Z[J_{\vec{y}}] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^{-4n}}{(2n)!} \int d^2 x_1 \cdots d^2 x_{2n} \sum_{q_1, \dots, q_{2n} = \pm 1} \left\langle \prod_{j=1}^k e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}} J_j \tilde{\phi}(y_j)} \prod_{a=1}^{2n} e^{iq_a \sqrt{\frac{\pi}{g}} \phi(x_a)} \right\rangle_0 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^{-4n}}{(2n)!} \int d^2 x_1 \cdots d^2 x_{2n} \left\langle \prod_{j=1}^k e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}} J_j \tilde{\phi}(y_j)} \prod_{a=1}^{2n} \left(e^{i\sqrt{\frac{\pi}{g}} \phi(x_a)} + e^{-i\sqrt{\frac{\pi}{g}} \phi(x_a)} \right) \right\rangle_0 \\ &= \left\langle \prod_{j=1}^k e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}} J_j \tilde{\phi}(y_j)} \exp \left(2r_0^{-2} \int d^2 x \cos \sqrt{\frac{\pi}{g}} \phi(x) \right) \right\rangle_0 \\ &= \int D\phi e^{-S_{\text{SG}}[\phi]} \prod_{j=1}^k e^{i\sqrt{\frac{g}{4\pi}} J_j \tilde{\phi}(y_j)}, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$S_{\text{SG}}[\phi] = \int d^2 x \left(\frac{(\partial_\mu \phi)^2}{8\pi} - \mu \cos \beta \phi \right) \quad (31)$$

— действие для модели синус-Гордона с параметрами

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi}{g}}, \quad \mu = 2r_0^{\frac{\pi}{g}-2}. \quad (32)$$

Действие мы переписали через перенормированные экспоненты. В дальнейшем мы будем большей частью опускать значки \cdots и понимать под экспонентами именно перенормированные экспоненты.

Более подробно мы изучим модель синус-Гордона в следующий раз, а пока введем несколько важных понятий. Будем рассматривать модель синус-Гордона как возмущение свободного безмассового бозона. Тогда масштабная размерность оператора возмущения будет равна

$$d_{\text{pert}} = \beta^2.$$

Когда $d_{\text{pert}} < 2$ возмущение называется *релевантным*. Оно существенно меняет поведение системы на больших масштабах и не меняет на малых. Когда $d_{\text{pert}} > 2$ возмущение называется *иррелевантным* и не меняет качественно инфракрасного поведения. Случай $d_{\text{pert}} = 2$ называется *маргинальным*. В случае модели синус-Гордона именно он соответствует точке перехода БКТ.

Пояснение

Это пояснение касается определения экспоненциальных операторов в теории свободного скалярного поля. Для простоты мы ограничимся функционалами от поля $\varphi(z) \equiv \varphi_R(z)$. Для этого поля можно записать разложение

$$\varphi(z) = Q - iP \log z + \sum_{k \neq 0} \frac{a_k}{ik} z^{-k}, \quad (33)$$

где эрмитовы операторы P, Q и операторы рождения-уничтожения $a_k = a_{-k}^+$ удовлетворяют соотношениям

$$[P, Q] = -i, \quad [a_k, a_l] = k\delta_{k+l,0}. \quad (34)$$

Если определить вакуум $|0\rangle$ условиями

$$P|0\rangle = a_k|0\rangle = 0 \quad (k > 0), \quad (35)$$

то нетрудно проверить, что

$$\langle \varphi(z')\varphi(z) \rangle = \langle Q^2 \rangle + \langle \varphi(z')\varphi(z) \rangle_* = \langle Q^2 \rangle + \log \frac{1}{z' - z}. \quad (36)$$

Неопределенное выражение $\langle Q^2 \rangle$ можно отождествить с инфракрасным членом $\log R$ в (22). Также легко видеть, что стандартное нормальное упорядочение, которое ставит P справа от Q и a_k ($k > 0$) справа от a_{-k} , отвечает условию

$$\varphi(z_1)\varphi(z_2) = :\varphi(z_1)\varphi(z_2): + \langle \varphi(z_1)\varphi(z_2) \rangle_*.$$

Более общо, нормальное упорядочение может быть задано рекурсионным соотношением

$$:\varphi(z_1) \cdots \varphi(z_n): \varphi(z) = :\varphi(z_1) \cdots \varphi(z_n)\varphi(z): + \sum_{i=1}^n :\varphi(z_1) \cdots \widehat{\varphi(z_i)} \cdots \varphi(z_n): \langle \varphi(z_i)\varphi(z) \rangle_* \quad (37)$$

с начальными условиями

$$:1: = 1. \quad (38)$$

Здесь индекс \widehat{i} над многоточием означает, что из нормального произведения исключен i -тый множитель. Отсюда нетрудно вывести, что

$$\begin{aligned} &:\varphi(z_1) \cdots \varphi(z_m): :\varphi(w_1) \cdots \varphi(w_n): = \\ &= \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m \\ 1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n}} :\varphi(z_1) \cdots \widehat{\varphi(z_{i_1})} \cdots \widehat{\varphi(z_{i_k})} \cdots \varphi(z_m)\varphi(w_1) \cdots \widehat{\varphi(w_{j_1})} \cdots \widehat{\varphi(w_{j_k})} \cdots \varphi(w_n): \prod_{l=1}^k \langle \varphi(z_{i_l})\varphi(w_{j_l}) \rangle_*. \end{aligned} \quad (39)$$

Вернемся к операторным экспонентам $e^{i\alpha\varphi(z)}$. Операторные произведения формальных экспонент

$$e^{i\alpha_1\varphi(z_1)} e^{i\alpha_2\varphi(z_2)} = e^{-\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2[\varphi(z_1),\varphi(z_2)]} e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+i\alpha_2\varphi(z_2)} \quad (40)$$

довольно плохо определены, так как содержат плохо определенный коммутатор. Корреляционные функции формальных экспонент

$$\langle e^{i\alpha_1\varphi(z_1)} \cdots e^{i\alpha_N\varphi(z_N)} \rangle = \left(\frac{r_0}{R}\right)^{\frac{1}{2}\sum_i \alpha_i^2} \prod_{i < j} \left(\frac{z_i - z_j}{R}\right)^{\alpha_i\alpha_j} \quad (41)$$

содержат ультрафиолетовые расходимости. Таким образом, формальные экспоненты плохо определены.

Нормальные экспоненты хорошо определены, все их корреляторы ультрафиолетово конечны. Можно проверить, что

$$\langle :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+\cdots+i\alpha_n\varphi(z_n)}: \rangle = \langle e^{i(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)Q} \rangle = R^{-\frac{1}{2}(\sum \alpha_i)^2}. \quad (42)$$

Операторные произведения нормальных экспонент имеют вид

$$:e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}: :e^{i\alpha_2\varphi(z_2)}: = (z_1 - z_2)^{\alpha_1\alpha_2} :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+i\alpha_2\varphi(z_2)}: . \quad (43)$$

Отсюда нетрудно найти корреляционные функции

$$\langle :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}: \dots :e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}: \rangle = R^{-\frac{1}{2}(\sum \alpha_i)^2} \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{\alpha_i\alpha_j}. \quad (44)$$

Сравнивая это с (41), мы видим, что

$$e^{i\alpha\varphi(z)} = r_0^{\alpha^2/2} :e^{i\alpha\varphi(z)}:,$$

то есть нормальные экспоненты, зависящие от одного поля $\varphi(z)$, представляют собой не что иное как перенормированные версии полных операторных экспонент, определенные в (23). Вне этого пояснения, чтобы не загромождать формулы, мы будем опускать знак нормального произведения.

Выражение (44) явно содержит инфракрасную обрезку R , но имеет хороший предел при $R \rightarrow \infty$:

$$\langle :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}: \dots :e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}: \rangle = \begin{cases} \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{\alpha_i\alpha_j}, & \text{если } \sum_i \alpha_i = 0; \\ 0, & \text{если } \sum_i \alpha_i \neq 0. \end{cases} \quad (45)$$

В частности, на бесконечной плоскости

$$\langle :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)+\dots+i\alpha_n\varphi(z_n)}: \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_i \alpha_i = 0; \\ 0, & \text{если } \sum_i \alpha_i \neq 0. \end{cases} \quad (46)$$

Задачи

1. Возьмите пространственные интегралы и получите (8).
2. Выведите формулу (17).
3. Покажите, что для свободного поля ϕ с действием $S_0[\phi]$ парная корреляционная функция равна

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = \log \frac{R^2}{(x-y)^2}$$

с некоторым масштабом инфракрасного обрезания R .

4. Предположим, что поле $\phi(x)$ с действием $S_0[\phi]$ определено на окружности радиуса R ($\phi \sim \phi + 2\pi R$) и живет на пространственной окружности ($x^1 \sim x^1 + 2\pi$) с периодическими граничными условиями. Покажите, что теория эквивалентна теории поля $\tilde{\phi}(x)$, определенного на окружности радиуса $2/R$ (*T-дуальность*). Для решения задачи можно использовать разложение по модам в гамильтоновом формализме. При этом следует учесть, что при обходе по пространственному циклу поле может измениться на целое число периодов эквивалентности $2\pi R$ (число намотки). При преобразовании дуальности число намотки и квантовое число импульса меняются местами.